

## К ВОПРОСУ О МОМЕНТЕ ИНЕРЦИИ КВАНТОВОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

© 2013 г. А. А. Хамзин<sup>1)\*</sup>, А. С. Ситдигов<sup>1),2)</sup>, А. С. Никитин<sup>2)</sup>, Д. А. Роганов<sup>3)</sup>

Поступила в редакцию 14.03.2012 г.; после доработки 04.07.2012 г.

Предлагается оригинальный метод расчета момента инерции коллективного вращения ядра в рамках кренкинг-модели с гамильтонианом гармонического осциллятора при произвольных частотах вращения и конечных температурах. В адиабатическом пределе с помощью аналитических вычислений получена осцилляционная зависимость момента инерции от химического потенциала. Показано, что осцилляции момента инерции увеличиваются при приближении к сферическому пределу и экспоненциально убывают с увеличением температуры.

DOI: 10.7868/S0044002713020128

### ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее плодотворных подходов при исследовании вращательных состояний атомных ядер и конечных ферми-систем является модель принудительного вращения (МПВ), или кренкинг-модель [1–3]. Коллективное вращение системы с аксиально-симметричным самосогласованным средним полем в рамках МПВ обычно рассматривают, решая задачу диагонализации одночастичного гамильтониана (раусиана). Однако многие значимые явления, возникающие при коллективном вращении, преимущественным образом обусловлены частицами вблизи поверхности Ферми, т.е. проявлением оболочечных эффектов. Такой простой факт позволяет избежать решения сложных нелинейных уравнений МПВ (например, полученных на основе общепринятого метода Хартри–Фока–Боголюбова) и существенно упростить описание коллективной ядерной динамики, разделяя многие физические величины на гладкую (усредненную, или томас-фермиевскую) и флуктуирующую (оболочечную, или осциллирующую) части. В частности, такой подход, основанный на методе оболочечных поправок Струтинского [4], позволил Пашкевичу и Фраундорфу [5] представить момент инерции в виде суммы гладкой и осциллирующей, связанной с оболочечными поправками, частей.

Следующим важным шагом в этом направлении является развитие квазиклассической теории Гу-

цвиллера [6] Струтинским и Магнером для вычисления осциллирующих компонент на основе мощной теории периодических орбит [7, 8]. В работах [9–11] эта методика была применена для вычисления оболочечных поправок к моментам инерции конечных ферми-систем с деформированным потенциалом гармонического осциллятора, также было проведено сравнение квазиклассических расчетов с квантовомеханическими вычислениями. Были выявлены осцилляции в поведении момента инерции в зависимости от химического потенциала при фиксированных значениях параметра деформации. Было замечено, что при переходе к сферическому пределу амплитуды таких осцилляций существенно усиливаются.

Целью настоящей работы является полное аналитическое исследование осцилляционной зависимости в поведении момента инерции от химического потенциала, выявленной в [11]. Первый раздел носит вспомогательный характер. Во втором разделе продемонстрирован оригинальный квантовомеханический метод расчета момента инерции ядра в рамках кренкинг-модели при конечных температурах на основе стандартной методики расчета корреляционных функций квантовой статистической физики. В третьем разделе проведено аналитическое рассмотрение осцилляционного поведения зависимости момента инерции от химического потенциала. В заключительной части работы кратко просуммированы полученные результаты.

### 1. КРЕНКИНГ-МОДЕЛЬ ДЛЯ ЯДЕРНОГО ВРАЩЕНИЯ

Гамильтониан кренкинг-модели для анизотропного гармонического осциллятора в представлении

<sup>1)</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, Россия.

<sup>2)</sup>Казанский государственный энергетический университет, Россия.

<sup>3)</sup>ОАО “Акционерный инвестиционный коммерческий банк “Татфондбанк”, Россия.

\*E-mail: [airat.khamzin@rambler.ru](mailto:airat.khamzin@rambler.ru)

вторичного квантования имеет вид

$$H^\omega = \sum_i h_i^\omega, \quad h_i^\omega = \hbar\omega_x \left( a_{xi}^+ a_{xi} + \frac{1}{2} \right) + \quad (1)$$

$$+ \hbar\omega_y \left( a_{yi}^+ a_{yi} + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_z \left( a_{zi}^+ a_{zi} + \frac{1}{2} \right) - \omega l_{xi},$$

где  $a_{\alpha i}^+$ ,  $a_{\alpha i}$  ( $\alpha = x, y, z$ ) — операторы рождения и уничтожения квантов, которые удовлетворяют известным коммутационным соотношениям для бозе-операторов:  $a_{\alpha i} a_{\beta j}^+ - a_{\beta j}^+ a_{\alpha i} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij}$ ;  $\omega$  — частота вращения;  $\omega_\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) — осцилляторные частоты;  $l_{xi}$  — оператор проекции орбитального момента  $i$ -го нуклона на ось вращения  $x$ , который определяется выражением

$$l_{xi} = \hbar \left( A(a_{yi} a_{zi}^+ + a_{yi}^+ a_{zi}) - B(a_{yi} a_{zi}^+ a_{yi}^+ a_{zi}^+) \right), \quad (2)$$

$$A = \frac{\omega_y + \omega_z}{2\sqrt{\omega_y \omega_z}}, \quad B = \frac{\omega_y - \omega_z}{2\sqrt{\omega_y \omega_z}}.$$

Одночастичный гамильтониан (1) может быть легко диагонализирован [3], и его собственные значения имеют вид

$$\varepsilon_\xi^\omega = \hbar\omega_x \left( n_{x\xi} + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_+ \left( n_{+\xi} + \frac{1}{2} \right) + \quad (3)$$

$$+ \hbar\omega_- \left( n_{-\xi} + \frac{1}{2} \right),$$

где

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2} (\omega_y^2 + \omega_z^2 + 2\omega^2) \pm \quad (4)$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_y^2 - \omega_z^2)^2 + 8\omega^2(\omega_y^2 + \omega_z^2)},$$

$n_{\alpha\xi}$  — число квантов состояния  $\xi$  в направлении  $\alpha$  ( $\alpha = x, \pm$ ). Зная собственные значения и собственные функции  $|\xi\rangle = |n_{x\xi} n_{+\xi} n_{-\xi}\rangle$  гамильтониана (1), несложно найти выражение для среднего значения одночастичного оператора проекции углового момента [3]:

$$\langle \xi | l_x | \xi \rangle = \hbar\omega \left\{ \frac{2(\omega_y^2 + \omega_z^2)}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \left( \frac{n_{-\xi} + 1/2}{\omega_-} - \right. \quad (5)$$

$$\left. - \frac{n_{+\xi} + 1/2}{\omega_+} \right) - \left( \frac{n_{-\xi} + 1/2}{\omega_-} + \frac{n_{+\xi} + 1/2}{\omega_+} \right) \right\},$$

и момента инерции:

$$\Theta_x(\omega) = \sum_\xi \frac{\langle \xi | l_x | \xi \rangle}{\omega} = \quad (6)$$

$$= \hbar \left\{ \frac{2(\omega_y^2 + \omega_z^2)}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \left( \frac{N_-}{\omega_-} - \frac{N_+}{\omega_+} \right) - \left( \frac{N_-}{\omega_-} + \frac{N_+}{\omega_+} \right) \right\},$$

где  $N_\pm = \sum_\xi (n_{\pm\xi} + 1/2)$  — общее число квантов в направлениях  $\pm$ . Формула (6) для момента инерции известна в литературе как формула Зелевинского [3].

Естественным продолжением развития теории момента инерции системы нуклонов в деформированном потенциале гармонического осциллятора является обобщение формулы Зелевинского на конечные температуры. В работе [12] был предложен способ обобщения формулы Зелевинского на конечные температуры. В следующем разделе мы продемонстрируем альтернативный метод расчета момента инерции ядра в рамках кренкинг-модели, основанный на известных методах расчета равновесных корреляционных функций (КФ) квантовой статистической физики [13] и методе работы [12]. Предлагаемый подход имеет преимущество в ситуации, когда точная диагонализация гамильтониана затруднена.

## 2. ТОЧНЫЙ РАСЧЕТ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ КВАНТОВОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Основываясь на методике расчета КФ, описанной в [13], проведем квантовомеханический расчет момента инерции квантового гармонического осциллятора.

Базовыми операторами рассматриваемой системы нуклонов являются операторы рождения и уничтожения  $a_{\alpha i}^\pm$ , которые запишем в представлении Гейзенберга:

$$a_{\alpha i}^\pm(\tau) = e^{\tau H^\omega} a_{\alpha i}^\pm e^{-\tau H^\omega}, \quad \tau = it. \quad (7)$$

Уравнения движения для этих операторов примут вид:

$$\frac{da_{xi}^+(\tau)}{d\tau} = \omega_x a_{xi}^+(\tau), \quad (8)$$

$$\frac{da_{yi}(\tau)}{d\tau} = -\omega_y a_{yi}(\tau) - \omega B a_{zi}^+(\tau) + \omega A a_{zi}(\tau),$$

$$\frac{da_{yi}^+(\tau)}{d\tau} = \omega_y a_{yi}^+(\tau) - \omega A a_{zi}^+(\tau) + \omega B a_{zi}(\tau),$$

$$\frac{da_{zi}(\tau)}{d\tau} = -\omega_z a_{zi}(\tau) + \omega A a_{yi}(\tau) - \omega B a_{yi}^+(\tau),$$

$$\frac{da_{zi}^+(\tau)}{d\tau} = \omega_z a_{zi}^+(\tau) + \omega B a_{yi}(\tau) - \omega A a_{yi}^+(\tau).$$

Первое уравнение является независимым и без труда может быть проинтегрировано:  $a_{xi}^+(\tau) = e^{\omega_x \tau} a_{xi}^+$ . Остальные четыре уравнения представим в матричном виде

$$\tilde{\mathcal{A}}(\tau) = K \cdot \mathcal{A}(\tau), \quad (9)$$

где

$$\mathcal{A}(\tau) = \begin{pmatrix} a_{yi}(\tau) \\ a_{yi}^+(\tau) \\ a_{zi}(\tau) \\ a_{zi}^+(\tau) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$K = \begin{pmatrix} -\omega_y & 0 & \omega A & -\omega B \\ 0 & \omega_y & \omega B & -\omega A \\ \omega A & -\omega B & -\omega_z & 0 \\ \omega B & -\omega A & 0 & \omega_z \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче  $K$ -матрица (см. [13]) известна точно, поэтому задача допускает точное аналитическое решение. Собственные значения  $K$ -матрицы совпадают с (4). Отметим, что если  $K$ -матрица задачи не известна точно, то существует ряд самосогласованных схем ее вычисления [13] и открывается возможность решения задачи с более сложным, нежели рассматриваемым нами, гамильтонианом. Используя процедуру “одевания-раздевания” [13]

$$\langle \mathcal{A}_k(\beta_\xi) \mathcal{A}_m(0) \rangle = \langle \mathcal{A}_m(0) \mathcal{A}_k(0) \rangle, \quad (11)$$

где  $\beta_\xi = 1/T_\xi$ ,  $T_\xi$  — температура бозе-системы квантов в состоянии  $\xi$ ;  $k, m = 1, 2, 3, 4$  нумеруют компоненты вектора  $\mathcal{A}(\tau)$ , найдем следующую алгебраическую систему уравнений для определения искомого КФ:

$$\sum_l F_{kl}(\beta_\xi) \langle \mathcal{A}_l(0) \mathcal{A}_m(0) \rangle = \langle \mathcal{A}_m(0) \mathcal{A}_k(0) \rangle, \quad (12)$$

где  $F = \exp(\tau K)$ . Принимая во внимание коммутационные соотношения для бозе-операторов и вводя для матрицы КФ обозначение  $G_{km} = \langle \mathcal{A}_k(0) \mathcal{A}_m(0) \rangle$ , перепишем эту систему уравнений в виде

$$\sum_l (F_{kl}(\beta_\xi) - \delta_{kl}) G_{lm} = w_{km}, \quad (13)$$

которая в матричной форме может быть представлена следующим образом:

$$(F(\beta_\xi) - I)G = W. \quad (14)$$

Здесь  $W$  — матрица с элементами  $w_{km} = \pm 1$ , если  $(k, m) = (2, 1), (4, 3)$  и  $(k, m) = (1, 2), (3, 4)$  соответственно, а остальные элементы нули;  $I$  — единичная матрица. Решение (14) для матрицы КФ имеет вид

$$G = (F(\beta_\xi) - I)^{-1} W. \quad (15)$$

Расчет матрицы  $(F(\beta_\xi) - I)^{-1}$  по теореме Гамильтона–Кэли приводит к результату

$$D = (F(\beta_\xi) - I)^{-1} = -\frac{1}{2}I + \gamma_1 K + \gamma_3 K^3, \quad (16)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{(n_{-\xi} + 1/2)\omega_+^3 - (n_{+\xi} + 1/2)\omega_-^3}{\omega_+ \omega_- (\omega_+^2 - \omega_-^2)}, \quad (17)$$

$$\gamma_3 = \frac{(n_{+\xi} + 1/2)\omega_- - (n_{-\xi} + 1/2)\omega_+}{\omega_+ \omega_- (\omega_+^2 - \omega_-^2)},$$

$n_{\pm\xi} = (e^{\beta_\xi \omega_{\pm}} - 1)^{-1}$ . Окончательно матрицу корреляционных функций  $G$  представим в виде

$$G = \begin{pmatrix} d_{12} & -d_{11} & d_{14} & -d_{13} \\ d_{22} & -d_{21} & d_{24} & -d_{23} \\ d_{32} & -d_{31} & d_{34} & -d_{33} \\ d_{42} & -d_{41} & d_{44} & -d_{43} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где  $d_{km}$  — матричные элементы матрицы  $D$ . Тогда выражение для среднего значения проекции орбитального момента примет вид

$$\begin{aligned} \langle l_x \rangle_\xi &= A(d_{24} - d_{13}) - B(d_{14} - d_{23}) = \quad (19) \\ &= \hbar \omega \left\{ \frac{2(\omega_y^2 + \omega_z^2)}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \left( \frac{n_{-\xi} + 1/2}{\omega_-} - \frac{n_{+\xi} + 1/2}{\omega_+} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{n_{-\xi} + 1/2}{\omega_-} + \frac{n_{+\xi} + 1/2}{\omega_+} \right) \right\} \end{aligned}$$

(совпадает по виду с (5)). Используя подход работы [12], для момента инерции системы нуклонов получим

$$\begin{aligned} \Theta_x(\omega) &= \sum_\xi f(\varepsilon_\xi^\omega - \lambda) \frac{\langle l_x \rangle_\xi}{\omega} = \quad (20) \\ &= \hbar \left\{ \frac{2(\omega_y^2 + \omega_z^2)}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \left( \frac{\bar{N}_-}{\omega_-} - \frac{\bar{N}_+}{\omega_+} \right) - \left( \frac{\bar{N}_-}{\omega_-} + \frac{\bar{N}_+}{\omega_+} \right) \right\} \end{aligned}$$

(совпадает по виду с (6)). Здесь  $f(x) = (\exp(x/T) + 1)^{-1}$  — функция Ферми;

$$\bar{N}_\alpha = \sum_\xi f(\varepsilon_\xi^\omega - \lambda) (n_{\alpha\xi} + 1/2) (\alpha = \pm)$$

и  $\lambda$  — энергия Ферми. Выражение (20) представляет собой обобщение момента инерции квантового гармонического осциллятора на случай конечных температур.

### 3. АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ОСЦИЛЛЯЦИОННОЙ КОМПОНЕНТЫ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

В настоящем разделе проанализируем зависимость момента инерции от химического потенциала

в адиабатическом пределе при низких температурах. В указанном пределе предполагается малость частоты вращения  $\omega$  ( $\omega \rightarrow 0$ ), а спектр не зависит от частоты:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \hbar\omega_\perp(n_{\perp\xi} + 1) + \hbar\omega_z(n_{z\xi} + 1/2), \\ n_{\perp\xi} &= n_{x\xi} + n_{y\xi}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\omega_x = \omega_y = \omega_\perp$  при аксиальной симметрии;  $\omega_\perp = \omega_0\eta^{1/3}$ ;  $\omega_z = \omega_0\eta^{-2/3}$ ;  $\eta = \omega_\perp/\omega_z$  — параметр деформации. Тогда из уравнения (20) получим для момента инерции следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Theta_x &= \frac{d_s\hbar}{2\omega_\perp\omega_z} \left[ \frac{(\omega_z - \omega_\perp)^2}{\omega_\perp + \omega_z} (\bar{N}_y + \bar{N}_z) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\omega_z + \omega_\perp)^2}{\omega_\perp - \omega_z} (\bar{N}_z - \bar{N}_y) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\bar{N}_\alpha = \sum_\xi f(\varepsilon_\xi - \lambda) (n_{\alpha\xi} + 1/2),$$

$d_s$  — спиновое вырождение.

На рис. 1 представлены результаты численного расчета момента инерции (22) системы нуклонов в деформированном гармоническом потенциале в зависимости от химического потенциала для различных значений параметра деформаций  $\eta$  при температуре  $T = 0.1\hbar\omega_0$ . Рисунок 1 демонстрирует наличие осцилляций в зависимости момента инерции от химического потенциала, причем амплитуда осцилляций увеличивается при приближении деформации к сферическому пределу. На рисунке для сравнения также показана зависимость квантовомеханического твердотельного момента инерции  $\Theta_x^{\text{rig}}$ :

$$\begin{aligned} \Theta_x^{\text{rig}} &= d_s m \sum_\xi f(\varepsilon_\xi - \lambda) \langle \xi | y^2 + z^2 | \xi \rangle = \\ &= d_s \hbar \left( \frac{\bar{N}_y}{\omega_\perp} + \frac{\bar{N}_z}{\omega_z} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Из рис. 1 видно, что осцилляции  $\Theta_x^{\text{rig}}(\lambda)$  выделяются всюду относительно приближения Томаса—Ферми  $\Theta_{x\text{TF}}^{\text{rig}}(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \Theta_{x\text{TF}}^{\text{rig}} &= m \int d\mathbf{r} r_\perp^2 \rho_{\text{TF}}(\mathbf{r}) = \\ &= \frac{m d_s}{6\pi^2 \hbar^3} \int d\mathbf{r} (y^2 + z^2) p_{\text{F}}^2(r) = \left( \frac{1 + \eta^2}{3\omega_\perp^2} \right) \frac{\lambda^4}{4(\hbar\omega_0)^3}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$p_{\text{F}}(r) = \sqrt{2m(\varepsilon_{\text{F}} - m[(x^2 + y^2)\omega_\perp^2 + \omega_z^2 z^2]/2)},$$

с томас-фермиевской плотностью состояний  $\rho_{\text{TF}}(\mathbf{r}) = d_s p_{\text{F}}^3/(6\pi^2 \hbar^3)$ .

Большие осцилляции полного момента инерции  $\Theta_x$  по сравнению с осцилляциями  $\Theta_x^{\text{rig}}$  при малых деформациях нетрудно понять из выражения (22), которое удобно переписать в виде

$$\Theta_x = \Theta_x^{\text{rig}} + \frac{4\eta^2}{\omega_\perp^2(\eta^2 - 1)} q, \quad (25)$$

где  $q = \omega_z \bar{N}_z - \omega_\perp \bar{N}_\perp$ . Соответственно оболочечная (осцилляционная) поправка  $\delta\Theta_x$  будет равна:

$$\delta\Theta_x = \delta\Theta_x^{\text{rig}} + \frac{4\eta^2}{\omega_\perp^2(\eta^2 - 1)} \delta q, \quad (26)$$

т.е. определяется оболочечными поправками  $\delta\Theta_x^{\text{rig}}$  и  $\delta q$ . Функция  $q$  характеризует нарушение статистически равновесного вращения ( $\omega_x \bar{N}_x = \omega_y \bar{N}_y = \omega_z \bar{N}_z$ ), и наличие даже небольших оболочечных поправок в ней за счет множителя  $\eta^2 - 1$  в знаменателе приводит при приближении к сферическому пределу к значительному увеличению амплитуды осцилляций.

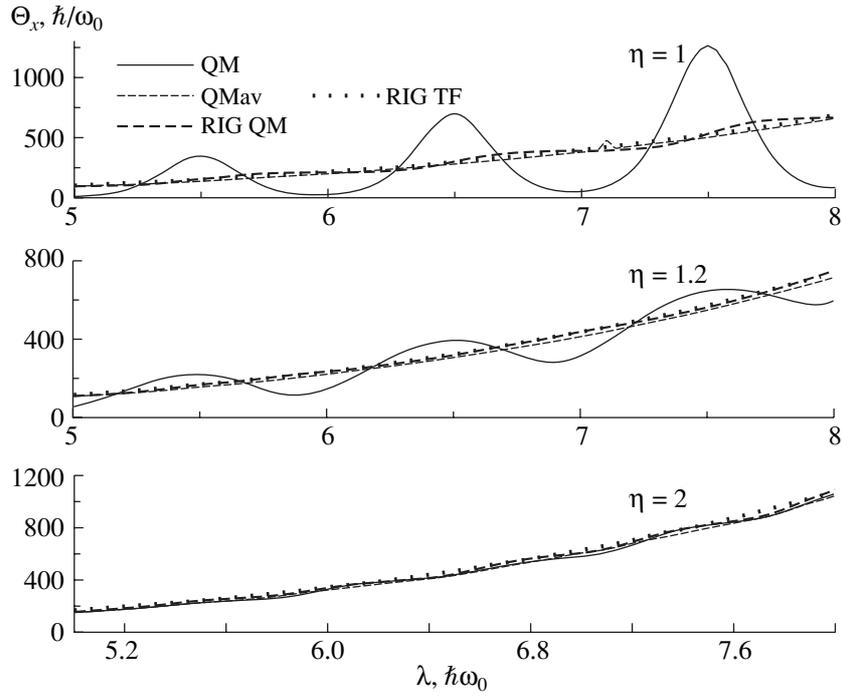
Осцилляционное поведение момента инерции в некотором роде аналогично появлению осцилляций де Гааза—Ван Альфена в электронном газе, которые связаны с квантованием уровней Ландау в магнитном поле. Подобные осцилляции термодинамических характеристик проявляются во многих квантовых конечных ферми-системах [14] и являются следствием дискретности состояний, когда температура  $T$  становится меньше или порядка расстояния между уровнями  $\delta \sim E_{\text{F}}/N$  ( $E_{\text{F}}$  — энергия ферми-системы,  $N$  — число частиц в системе). В связи с этим проанализируем осцилляции в поведении момента инерции в зависимости от химического потенциала, используя стандартную методику расчета осцилляционных компонент физических величин электронного газа в магнитном поле [15, 16].

Перепишем выражение для момента инерции (22) в виде

$$\begin{aligned} \Theta_x &= \frac{\hbar}{\omega_\perp(\eta^2 - 1)} \times \\ &\times [(\eta - 1)^3 \bar{N}_+ + (\eta + 1)^3 \bar{N}_-], \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{N}_\pm &= \bar{N}_z \pm \bar{N}_y = \\ &= \sum_\xi f(\varepsilon_\xi - \lambda) \left( n_{z\xi} + \frac{1}{2} \pm \left( n_{y\xi} + \frac{1}{2} \right) \right) = \\ &= \sum_{n_\perp, n_z} (n_\perp + 1) f(\varepsilon_{n_\perp, n_z} - \lambda) \times \\ &\times \left( n_z + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} (n_\perp + 1) \right) \end{aligned} \quad (28)$$



**Рис. 1.** Момент инерции (22) (квантовый, QM), его усредненное по Струтинскому значение (QMav), твердотельное значение (23) (RIG QM) и его томас-фермиевское приближение (24) (RIG TF) как функции химического потенциала  $\lambda$  для некоторых значений параметра деформаций  $\eta$  и температуры  $T = 0.1\hbar\omega_0$ .

и учтено, что  $d_s = 2$ . Для выделения осциллирующей компоненты в моменте инерции (27) воспользуемся известной формулой суммирования Пуассона:

$$\frac{1}{2}\varphi(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) = \int_0^{\infty} \varphi(n)dn + \quad (29)$$

$$+ 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(n) \exp(2\pi i k n) dn.$$

Применим эту формулу к сумме по  $n_{\perp}$  в двукратных суммах (28) (предполагаем, что число квантов в направлении  $\perp$  может изменяться неограниченно). При этом каждая сумма разделится на два интеграла. Только второй интеграл в (28) дает осциллирующую добавку, и поэтому только его и будем рассматривать. Тогда имеем для осциллирующих частей выражений  $\tilde{N}_{\pm}$ :

$$\tilde{N}_{\pm} = \text{Re} \sum_{n_z} \sum_{k=1}^{\infty} J_k^{\pm}, \quad (30)$$

где  $\tilde{N}_{\pm}$  обозначает осциллирующую часть  $\tilde{N}_{\pm}$ , а

$$J_k^{\pm} = \int_0^{\infty} (n_{\perp} + 1)(2n_z + 1 \pm (n_{\perp} + 1)) \times \quad (31)$$

$$\times f(\varepsilon_{n_{\perp}n_z} - \lambda) \exp(2\pi i k n_{\perp}) dn_{\perp}.$$

Далее удобно от интегрирования по  $n_{\perp}$  перейти к интегрированию по энергии  $\varepsilon$ . Это дает

$$J_k^{\pm} = \pm \frac{1}{\omega_{\perp}} \exp\left(-\frac{2\pi i k}{\eta} \left[n_z + \frac{1}{2}\right]\right) \times \quad (32)$$

$$\times \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{\exp(2\pi i k \varepsilon / \omega_{\perp})}{\exp((\varepsilon - \lambda)/T) + 1} \left(\frac{\varepsilon}{\omega_{\perp}} - \left[\frac{\varepsilon_0 n_z}{\omega_{\perp}} - 1\right]\right) \times$$

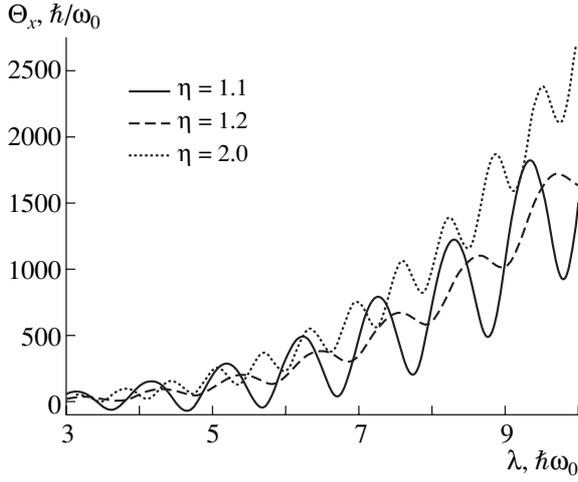
$$\times \left(\frac{\varepsilon}{\omega_{\perp}} \pm (2\eta \mp 1) \left[\frac{\varepsilon_0 n_z}{\omega_{\perp}} - 1\right]\right).$$

Нижний предел при интегрировании по энергии мы выбрали равным нулю, поскольку существенна лишь окрестность ферми-поверхности и выбор нижнего предела произволен. При дальнейшем интегрировании удобно перейти к новой переменной  $\zeta = (\varepsilon - \lambda)/T$  и, заменив нижний предел  $-\lambda/T$  на  $-\infty$  (поскольку считаем, что  $\lambda/T \gg 1$ ), получим

$$J_k^{\pm} = \pm \left(\frac{T}{\omega_{\perp}}\right)^3 \times \quad (33)$$

$$\times \exp\left(2\pi i k \left\{\frac{\lambda}{\omega_{\perp}} - \frac{1}{\eta} \left[n_z + \frac{1}{2}\right]\right\}\right) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \frac{\exp(2\pi i k T \zeta / \omega_{\perp})}{\exp(\zeta) + 1} \times$$



**Рис. 2.** Момент инерции  $\Theta_x = \bar{\Theta}_x + \tilde{\Theta}_x$ , где  $\bar{\Theta}_x \approx \Theta_{x\text{TF}}^{\text{rig}}$  (24) и  $\tilde{\Theta}_x$  (38), как функция химического потенциала  $\lambda$  для некоторых значений параметра деформации  $\eta$  и температуры  $T = 0.1\hbar\omega_0$ .

$$\times \left( \zeta + \frac{\lambda}{T} - \frac{1}{T} [\varepsilon_{0n_z} - \omega_{\perp}] \right) \times$$

$$\times \left( \zeta + \frac{\lambda}{T} \pm \frac{2\eta \mp 1}{T} [\varepsilon_{0n_z} - \omega_{\perp}] \right).$$

Снова принимая во внимание, что в подынтегральном выражении существенна область вблизи ферми-поверхности, приведем формулу (33) к виду

$$J_k^{\pm} \sim \pm \frac{T\lambda^2}{\omega_{\perp}^3} \times \quad (34)$$

$$\times \exp \left( 2\pi i k \left\{ \frac{\lambda}{\omega_{\perp}} - \frac{1}{\eta} \left[ n_z + \frac{1}{2} \right] \right\} \right) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(2\pi i k T \zeta / \omega_{\perp})}{\exp(\zeta) + 1} d\zeta.$$

Далее, воспользовавшись интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha\zeta}}{e^{\zeta} + 1} d\zeta = \frac{-i\pi}{\text{sh}(\pi\alpha)},$$

окончательно получим следующее выражение для интегралов  $J_k^{\pm}$ :

$$J_k^{\pm} \sim \mp \frac{i\pi T \lambda^2}{\omega_{\perp}^3} \times \quad (35)$$

$$\times \frac{\exp \left( 2\pi i k \left\{ \frac{\lambda}{\omega_{\perp}} - \frac{1}{\eta} \left[ n_z + \frac{1}{2} \right] \right\} \right)}{\text{sh}(2\pi^2 T k / \omega_{\perp})}.$$

В результате выражения для сумм  $\tilde{N}_{\pm}$  примут

вид:

$$\tilde{N}_{\pm} = \mp \frac{\pi T \lambda^2}{\omega_{\perp}^3} \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ \frac{i \exp(2\pi i k \lambda / \omega_{\perp})}{\text{sh}(2\pi^2 T k / \omega_{\perp})} \times \quad (36)$$

$$\times \sum_{n_z} \exp \left( -\frac{2\pi i k}{\eta} \left[ n_z + \frac{1}{2} \right] \right) \right\}.$$

Выполнив суммирование по  $n_z$  в (36) и считая параметр  $\eta$  иррациональным,

$$\sum_{n_z} \exp \left( -\frac{2\pi i k}{\eta} \left[ n_z + \frac{1}{2} \right] \right) = -\frac{i}{2 \sin(\pi k / \eta)},$$

получим

$$\tilde{N}_{\pm} \sim \mp \frac{\pi T \lambda^2}{2\omega_{\perp}^3} \times \quad (37)$$

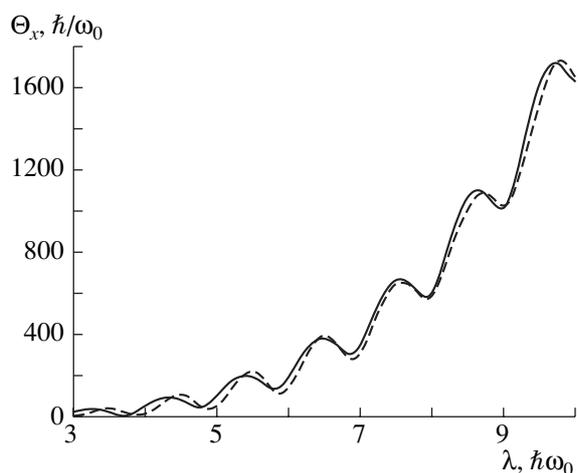
$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k \lambda / \omega_{\perp})}{\text{sh}(2\pi^2 T k / \omega_{\perp}) \sin(\pi k / \eta)}.$$

Подстановка (37) в (27) приводит к следующему выражению для осциллирующей компоненты момента инерции:

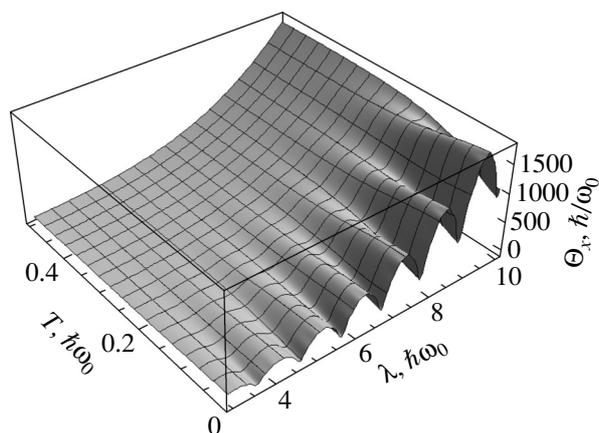
$$\tilde{\Theta}_x \sim \frac{\hbar\pi(1 + 3\eta^2)T\lambda^2}{\omega_{\perp}^4(\eta^2 - 1)} \times \quad (38)$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k \lambda / \omega_{\perp})}{\text{sh}(2\pi^2 T k / \omega_{\perp}) \sin(\pi k / \eta)}.$$

Таким образом, согласно (38), момент инерции действительно является осциллирующей функцией энергии Ферми  $\lambda$  с периодом  $\Delta = \omega_{\perp}$ . Отметим, что период осцилляций не зависит от температуры. Монотонную часть момента инерции (обозначим ее  $\bar{\Theta}_x$ ) можно аппроксимировать твердотельным выражением в приближении Томаса–Ферми (24):  $\bar{\Theta}_x \approx \Theta_{x\text{TF}}^{\text{rig}}(\lambda)$ . При  $T \gg \omega_{\perp}$  амплитуда экспоненциально убывает (как  $\exp(-2\pi^2 T / \omega_{\perp})$ ) и становится пренебрежимо малой. На рис. 2 приведены зависимости момента инерции  $\Theta_x = \bar{\Theta}_x + \tilde{\Theta}_x$ , где  $\bar{\Theta}_x \approx \Theta_{x\text{TF}}^{\text{rig}}$  (24) и  $\tilde{\Theta}_x$  (38), от химического потенциала  $\lambda$  для некоторых значений параметра деформации  $\eta$  и температуры  $T = 0.1\hbar\omega_0$ . На рис. 3 для сравнения приведены зависимости момента инерции от химического потенциала, рассчитанные по приближенной формуле (сплошная кривая) и полученные посредством точного численного расчета по формуле (27) (штриховая кривая), для  $T = 0.1\hbar\omega_0$  и  $\eta = 1.2$ . На рис. 4 приведена зависимость момента инерции от химического потенциала и температуры при  $\eta = 1.15$  для демонстрации спада осцилляций при увеличении температуры.



**Рис. 3.** Моменты инерции, рассчитанные по формуле  $\Theta_x = \bar{\Theta}_x + \tilde{\Theta}_x$  (сплошная кривая), где  $\bar{\Theta}_x \approx \Theta_{xTF}^{ng}$  (24) и  $\tilde{\Theta}_x$  (38), и полученные с помощью точных численных расчетов по формуле (27) (штриховая кривая), как функции химического потенциала  $\lambda$  для  $\eta = 1.2$  и температуры  $T = 0.1\hbar\omega_0$ .



**Рис. 4.** Момент инерции  $\Theta_x = \bar{\Theta}_x + \tilde{\Theta}_x$ , где  $\bar{\Theta}_x \approx \Theta_{xTF}^{ng}$  (24) и  $\tilde{\Theta}_x$  (38), как функция химического потенциала  $\lambda$  и температуры при  $\eta = 1.15$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведен анализ осциллирующего момента инерции в рамках кренкинг-модели

с деформированным гармоническим потенциалом и получено аналитическое выражение для осцилляционной части момента инерции. Показано, что осцилляционная компонента момента инерции как функция химического потенциала имеет период, равный  $\omega_{\perp} = \omega_0 \eta^{1/3}$ , который не зависит от температуры. При заданной температуре амплитуда осцилляций возрастает при приближении деформации к сферическому пределу и экспоненциально спадает при увеличении температуры.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. R. Inglis, Phys. Rev. **96**, 1059 (1954).
2. A. Bohr and B. Mottelson, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd. **30**, 1 (1955).
3. В. Г. Зелевинский, ЯФ **22**, 1085 (1975) [Sov. J. Nucl. Phys. **22**, 565 (1975)].
4. V. M. Strutinsky, Nucl. Phys. A **95**, 420 (1967).
5. В. В. Пашкевич, С. Фрайндорф, ЯФ **20**, 1122 (1974) [Sov. J. Nucl. Phys. **20**, 588 (1974)].
6. M. J. Gutzwiller, J. Math. Phys. **12**, 343 (1971).
7. M. Brack and R. K. Bhaduri, *Semiclassical Physics* (Frontiers in Physics, No. 96), 2nd ed. (Westview Press, Boulder, CO, 2003).
8. В. М. Струтинский, А. Г. Магнер, ЭЧАЯ **7**, 356 (1976) [Sov. J. Part. Nucl. **7**, 138 (1976)].
9. A. G. Magner, A. M. Gzhebinsky, A. S. Sitdikov, A. A. Khamzin, and J. Bartel, Int. J. Mod. Phys. E **19**, 735 (2010).
10. A. G. Magner, A. S. Sitdikov, A. A. Khamzin, *et al.*, ЯФ **73**, 1442 (2010) [Phys. Atom. Nucl. **73**, 1398 (2010)].
11. A. G. Magner, A. S. Sitdikov, A. A. Khamzin, and J. Bartel, Phys. Rev. C **81**, 064302 (2010).
12. L. Jacak, W. Nawrocka, R. G. Nazmitdinov, and A. Wojs, J. Phys. G **21**, 1205 (1995).
13. М. Ф. Сарры, УФН **161**(11), 47 (1991) [Sov. Phys. Usp. **34**, 958 (1991)].
14. А. Р. Миннуллин, Д. А. Таюрский, Письма в ЖЭТФ **72**, 891 (2000) [JETP Lett. **72**, 616 (2000)].
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, т. 5* (Физматлит, Москва, 2002).
16. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов* (Наука, Москва, 1987).

## INERTIA MOMENT OF QUANTUM CRANKED HARMONIC OSCILLATOR

A. A. Khamzin, A. S. Sitdikov, A. S. Nikitin, D. A. Roganov

The original method for the calculation of inertia moment of nucleus at arbitrary frequencies and finite temperatures in framework of cranking model with harmonic oscillator potential is suggested. In the adiabatic case the analytical calculations show oscillations of inertia moment in dependence on chemical potential. It is shown that the oscillations of the moment of inertia increase at spherical limit of deformation and exponentially decrease at increase of temperature.