

© 2013 г.

А. А. Хамзин*, А. С. Никитин[†],
А. С. Ситдииков[†], Д. А. Роганов[‡]

ОСЦИЛЛЯЦИИ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ КОНЕЧНОЙ ФЕРМИ-СИСТЕМЫ В РАМКАХ КРЕНКИНГ-МОДЕЛИ

В рамках кренкинг-модели с потенциалом анизотропного гармонического осциллятора проведен строгий аналитический расчет зависимости момента инерции конечной ферми-системы при конечных температурах от химического потенциала в адиабатическом пределе. Показано, что данная зависимость включает гладкую и осциллирующую составляющие. Найдены аналитические выражения для этих составляющих при произвольных температурах и частотах аксиальной деформации. Показано, что осцилляции момента инерции усиливаются при приближении к сферическому пределу и экспоненциально убывают с увеличением температуры.

Ключевые слова: конечная ферми-система, модель принудительного вращения, момент инерции ядра, анизотропный квантовый гармонический осциллятор, преобразование Меллина.

DOI: 10.4213/tmf8446

1. ВВЕДЕНИЕ

Коллективные вращения ядер успешно описываются в рамках нескольких теоретических подходов, которые главным образом основаны на модели принудительного вращения или кренкинг-модели [1]–[5]. Было показано [4], [5], что моменты инерции могут быть представлены в виде суммы гладкой классической твердотельной составляющей расширенного приближения Томаса–Ферми [6]–[8] и оболочечных поправок [4], полученных в рамках метода оболочечных поправок [9], [10], адаптированного к проблеме вращения. Точные аналитические решения для произвольной частоты вращения были получены для потенциала гармонического осциллятора [11] и распространены на конечные температуры [12], [13].

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт физики, Казань, Россия. E-mail: airat.khamzin@rambler.ru

[†]Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия.
E-mail: drnikitin@rambler.ru, airat_vm@rambler.ru

[‡]Акционерный инвестиционный коммерческий Банк “Татфондбанк”, Казань, Россия.
E-mail: dima@e-inet.ru

Следующим шагом в этом направлении стало развитие так называемой квазиклассической теории периодических орбит [6], [14], [15], которая стала одним из мощных и плодотворных инструментов для глубокого понимания и аналитического анализа основных особенностей оболочечной структуры в конечных вращающихся ферми-системах. Эта методика была применена в работах [13], [16], [17] для вычисления оболочечных поправок к моментам инерции конечных ферми-систем с деформированным потенциалом гармонического осциллятора, в этих работах также было проведено сравнение квазиклассических расчетов с квантово-механическими вычислениями. Были выявлены осцилляции в поведении момента инерции в зависимости от химического потенциала при фиксированных значениях параметра деформации. Было замечено, что при переходе к сферическому пределу амплитуды таких осцилляций существенно увеличиваются.

Целью настоящей работы является детальный аналитический расчет осцилляционной зависимости момента инерции конечной ферми-системы при конечных температурах от химического потенциала в рамках квантово-механических вычислений. Аналитическое исследование квантово-механического выражения для момента инерции в зависимости от температуры, числа частиц и деформации не проводилось в указанных работах [12], [13].

2. КРЕНКИНГ-МОДЕЛЬ ДЛЯ ЯДЕРНОГО ВРАЩЕНИЯ И ЕЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУР

В рамках кренкинг-модели вращение ядра вокруг оси x , перпендикулярной оси симметрии z аксиально-симметричного потенциала $V(\mathbf{r})$ среднего поля, может быть описано путем решения задачи на собственные значения одночастичного гамильтониана во вращающейся системе координат, связанной с ядром [4], [5]:

$$\hat{H}^\omega = \hat{H}_0 - \omega \hat{L}_x, \quad \hat{H}_0 = \sum_i \hat{h}_{0i}, \quad \hat{h}_0 = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где ω – частота вращения, $\hat{L}_x = \sum_i \hat{l}_{xi}$ – оператор проекции полного углового момента ядра на ось вращения, \hat{l}_x – x -компонента одночастичного углового момента. В случае, когда потенциал среднего поля равен потенциалу анизотропного гармонического осциллятора

$$V(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (2)$$

гамильтониан (1) легко диагонализуется и его собственные значения имеют вид [11]

$$\varepsilon_\alpha^\omega = \hbar\omega_x \left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_1 \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_2 \left(n_2 + \frac{1}{2}\right), \quad (3)$$

где

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2 + 2\omega^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_y^2 - \omega_z^2)^2 + 8\omega^2(\omega_y^2 + \omega_z^2)}, \quad (4)$$

$\alpha = (n_x, n_1, n_2)$, $n_{x,1,2}$ – число квантов в соответствующих направлениях. Зная собственные значения и собственные функции $|\alpha\rangle = |n_x n_1 n_2\rangle$ гамильтониана (1),

несложно найти выражения для среднего значения одночастичного оператора проекции углового момента и момента инерции:

$$\langle \alpha | l_x | \alpha \rangle = \hbar \omega \left\{ \frac{2(\omega_y^2 + \omega_z^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \left(\frac{n_2 + 1/2}{\omega_2} - \frac{n_1 + 1/2}{\omega_1} \right) - \left(\frac{n_2 + 1/2}{\omega_2} + \frac{n_1 + 1/2}{\omega_1} \right) \right\}, \quad (5)$$

$$\Theta_x(\omega) = \sum_{\alpha} \frac{\langle \alpha | l_x | \alpha \rangle}{\omega} = \hbar \left[\frac{2(\omega_y^2 + \omega_z^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} - 1 \right] \frac{N_2}{\omega_2} - \hbar \left[\frac{2(\omega_y^2 + \omega_z^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} + 1 \right] \frac{N_1}{\omega_1}, \quad (6)$$

где $N_{1,2} = \sum_{\alpha} (n_{1,2} + 1/2)$ – общее число квантов в направлениях 1, 2 [11]. Формула (6) для момента инерции известна в литературе как формула Зелевинского [11].

Естественным продолжением развития теории момента инерции системы нуклонов в деформированном потенциале гармонического осциллятора является обобщение формулы Зелевинского на конечные температуры. В работе [12] с использованием большого канонического распределения получена система уравнений для определения параметров формы ядра и момента инерции как функции температуры и числа частиц, которая исследовалась численными методами. В рамках численных расчетов анализировалась равновесная форма ядра в зависимости от температуры и числа частиц для случаев присутствия и отсутствия вращения. Во вращающейся системе координат при низких температурах обнаружена серия резких деформационных переходов, которые тесно коррелируют с оболочечной структурой гармонического осциллятора.

Ввиду исключительной важности этой формулы ниже мы продемонстрируем вывод момента инерции системы нуклонов, описываемой гамильтонианом (1), для конечных температур.

Воспользуемся большим термодинамическим потенциалом

$$\Omega = -T \ln Z, \quad (7)$$

соответствующим статистической сумме

$$Z = \text{Sp}(e^{-(\hat{H}^\omega - \lambda \hat{N})/T}), \quad (8)$$

где T – температура в энергетических единицах, λ – химический потенциал. В этом ансамбле числа заполнения одночастичных состояний подчиняются статистике Ферми, поэтому для Ω справедливо выражение

$$\Omega = -T \sum_{\alpha} \ln(1 + e^{-(\varepsilon_{\alpha}^{\omega} - \lambda)/T}), \quad (9)$$

где энергии одночастичных состояний $\varepsilon_{\alpha}^{\omega}$ определяются выражением (3). Определим среднее значение полного углового момента $\hat{L}_x = \sum_i \hat{l}_{xi}$:

$$\langle \hat{L}_x \rangle = \frac{1}{Z} \text{Sp}(e^{-(\hat{H}^\omega - \lambda \hat{N})/T} \hat{L}_x) = -\frac{\partial \Omega}{\partial \omega}. \quad (10)$$

Воспользуемся выражениями для большого термодинамического потенциала (7) и статистической суммы (8), получим

$$\langle \hat{L}_x \rangle = - \sum_{\alpha} f(\varepsilon_{\alpha}^{\omega} - \lambda) \frac{\partial \varepsilon_{\alpha}^{\omega}}{\partial \omega}, \quad (11)$$

где $f(x) = (e^{x/T} + 1)^{-1}$ – функция Ферми. Подставляя выражение (3) для энергий одночастичных состояний $\varepsilon_\alpha^\omega$ и выполняя дифференцирование по ω , найдем следующее выражение для момента инерции рассматриваемой модели при конечных температурах:

$$\Theta_x = \frac{\langle \widehat{L}_x \rangle}{\omega} = \hbar \left\{ \left[\frac{2(\omega_y^2 + \omega_z^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} - 1 \right] \frac{N_2}{\omega_2} - \left[\frac{2(\omega_y^2 + \omega_z^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} + 1 \right] \frac{N_1}{\omega_1} \right\}, \quad (12)$$

где $N_{1,2}$ определяются по формуле

$$N_{1,2} = \sum_\alpha f(\varepsilon_\alpha^\omega - \lambda) \left(n_{1,2} + \frac{1}{2} \right). \quad (13)$$

Полученное выражение для момента инерции по виду совпадает с выражением Зелевинского (6), но полное число квантов в направлениях 1, 2 определяются теперь по формулам (13).

В настоящем изложении мы сосредоточимся на анализе момента инерции в адиабатическом пределе, когда $\omega \rightarrow 0$, и для частного случая аксиальной симметрии: $\omega_x = \omega_y \equiv \omega_\perp$. В этом случае выражение (12) для момента инерции примет вид формулы Инглиса [1]

$$\Theta_x = \frac{\hbar}{\omega_\perp \omega_z} \left\{ \frac{(\omega_z - \omega_\perp)^2}{\omega_\perp + \omega_z} (N_y + N_z) + \frac{(\omega_z + \omega_\perp)^2}{\omega_\perp - \omega_z} (N_z - N_y) \right\}, \quad (14)$$

$$N_{y,z} = \sum_\alpha f(\varepsilon_\alpha - \lambda) \left(n_{y,z} + \frac{1}{2} \right), \quad \alpha = (n_x, n_y, n_z).$$

Здесь $\varepsilon_\alpha = \hbar \omega_\perp (n_x + n_y + 1) + \hbar \omega_z (n_z + 1/2)$. Принимая во внимание условие сохранения потенциального объема $\omega_x \omega_y \omega_z = \omega_0^3$, где ω_0 играет роль масштабного параметра, который будем считать не зависящим от температуры, удобно ввести параметр деформации $\eta = \omega_\perp / \omega_z > 1$, через который выражаются частоты деформации

$$\omega_\perp = \omega_0 \eta^{1/3}, \quad \omega_z = \omega_0 \eta^{-2/3}. \quad (15)$$

Используя эти определения и вводя новые функции $N_\pm = N_z \pm N_y$, приведем выражение для момента инерции (14) к следующему виду:

$$\Theta_x = \hbar \frac{(\eta - 1)^3 N_+ + (\eta + 1)^3 N_-}{\omega_\perp (\eta^2 - 1)}. \quad (16)$$

С учетом аксиальной симметрии потенциала для дальнейших расчетов энергии одночастичных состояний удобно представить в виде

$$\varepsilon_{n_\perp n_z} = \hbar \omega_\perp \left(n_\perp + \frac{n_z}{\eta} \right) + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \hbar \omega_\perp \left(1 + \frac{1}{2\eta} \right), \quad (17)$$

а функции $N_\pm = N_z \pm N_y$ в виде

$$N_\pm = \sum_{n_\perp, n_z} f(\varepsilon_{n_\perp n_z} - \lambda) (n_\perp + 1) \left(n_z + \frac{1}{2} \pm \frac{n_\perp + 1}{2} \right). \quad (18)$$

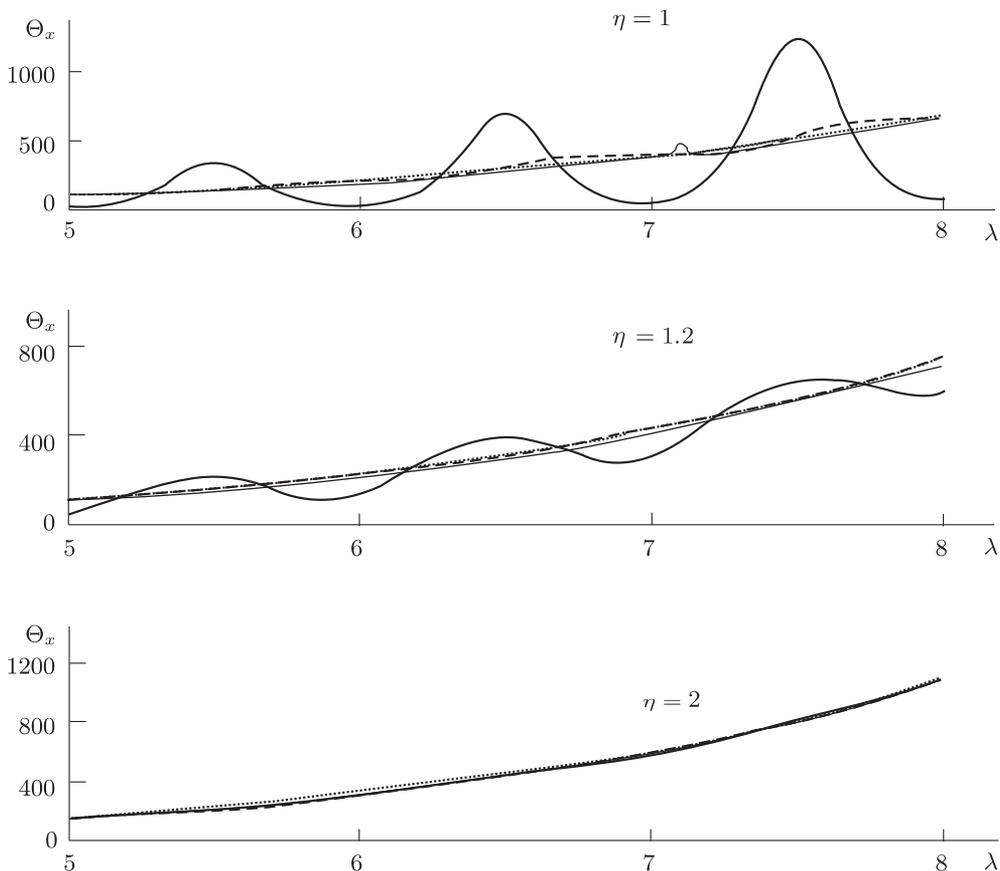


Рис. 1. Момент инерции (16) (сплошная линия), его усредненное по Струтинскому значение (тонкая сплошная линия), твердотельное значение (19) (штриховая линия) и его приближение Томаса–Ферми (20) (пунктирная линия) как функции химического потенциала λ для некоторых значений параметра деформаций и температуры $T = 0.1\hbar\omega_0$. Все моменты инерции приведены в единицах \hbar/ω_0 , λ – в единицах $\hbar\omega_0$.

На рис. 1, который взят из работы [13], представлены результаты численного расчета момента инерции (16) системы нуклонов в деформированном гармоническом потенциале в зависимости от химического потенциала для различных значений параметра деформаций η при температуре $T = 0.1\hbar\omega_0$. Рис. 1 демонстрирует наличие осцилляций в зависимости момента инерции от химического потенциала, причем амплитуда осцилляций увеличивается при приближении деформации к сферическому пределу. На рисунке для сравнения также показана зависимость квантово-механического твердотельного момента инерции

$$\Theta_x^{\text{rig}} = 2m \sum_{\alpha} f(\varepsilon_{\alpha} - \lambda) \langle \alpha | y^2 + z^2 | \alpha \rangle = 2\hbar \left(\frac{N_y}{\omega_{\perp}} + \frac{N_z}{\omega_z} \right). \tag{19}$$

Из рис. 1 видно, что осцилляции $\Theta_x^{\text{rig}}(\lambda)$ выделяются всюду относительно приближения Томаса–Ферми

$$\Theta_{x,\text{TF}}^{\text{rig}} = m \int \mathbf{dr} r_{\perp x}^2 \rho_{\text{TF}}(\vec{r}) = \frac{m}{3\pi^2 \hbar^3} \int \mathbf{dr} (y^2 + z^2) p_{\text{F}}^2(r) = \frac{1 + \eta^2}{3\omega_{\perp}^2} \frac{\lambda^4}{4\eta^2 (\hbar\omega_0)^3}, \quad (20)$$

где $p_{\text{F}}(\mathbf{r}) = \sqrt{2m(\varepsilon_{\text{F}} - m[(x^2 + y^2)\omega_{\perp}^2 + \omega_z^2 z^2]/2)}$, с томас-фермиевской плотностью состояний $\rho_{\text{F}}(\mathbf{r}) = p_{\text{F}}^3(\mathbf{r})/3\pi^2 \hbar^3$.

Большие осцилляции полного момента инерции Θ_x по сравнению с осцилляциями Θ_x^{rig} при малых деформациях нетрудно объяснить исходя из выражения (16), которое удобно переписать в виде

$$\Theta_x = \Theta_x^{\text{rig}} + \frac{4\eta^2}{\omega_{\perp}^2 (\eta^2 - 1)} q, \quad (21)$$

где $q = \omega_z N_z - \omega_{\perp} N_{\perp}$. Соответственно оболочечная (осцилляционная) поправка будет равна

$$\delta\Theta_x = \delta\Theta_x^{\text{rig}} + \frac{4\eta^2}{\omega_{\perp}^2 (\eta^2 - 1)} \delta q, \quad (22)$$

т. е. она определяется оболочечными поправками $\delta\Theta_x^{\text{rig}}$ и δq . Функция q характеризует нарушение условия статистически равновесного вращения

$$\omega_x N_x = \omega_y N_y = \omega_z N_z, \quad (23)$$

и наличие даже небольших оболочечных поправок в ней за счет наличия множителя $\eta^2 - 1$ в знаменателе приводит при приближении к сферическому пределу к значительному увеличению амплитуды осцилляций.

Осцилляционное поведение момента инерции в некотором роде аналогично появлению осцилляций де Гааза–Ван Альфена в электронном газе, которые связаны с квантованием уровней Ландау в магнитном поле. Подобные осцилляции термодинамических характеристик проявляются во многих квантовых конечных ферми-системах (см., например, [18]) и являются следствием дискретности состояний, когда температура T становится меньше или порядка расстояния между уровнями $\delta \sim E_{\text{F}}/N$ (E_{F} – энергия ферми-системы, N – число частиц в системе).

3. ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА РАСЧЕТА МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

В данном разделе сформулируем общие положения математической методики расчета момента инерции (16) системы нуклонов в адиабатическом пределе, в рамках которой, на наш взгляд, наиболее удобно произвести разделение выражения (16) на гладкую и осциллирующую компоненты. Предлагаемая методика базируется на применении преобразования Меллина и, как будет показано ниже, в приложениях не ограничивается только расчетом выражения вида (16). Отметим, что ниже мы примем $\hbar = 1$, $\omega_0 = 1$.

Представим выражение для функции Ферми, входящей в выражения (18) для N_{\pm} , в виде

$$f(\varepsilon - \lambda) = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \lambda)/T} + 1} = \frac{1}{\kappa e^{(\varepsilon - \varepsilon_0)/T} + 1} \equiv g(\kappa, \varepsilon), \quad (24)$$

где

$$\kappa = e^{(\varepsilon_0 - \lambda)/T}. \quad (25)$$

Продолжим область возможных значений химического потенциала λ на интервал $(-\infty, \varepsilon_0)$ и будем считать далее, что λ может принимать значения на всей действительной оси, т.е. $-\infty < \lambda < \infty$. Необходимость выполнения этого шага связана с допущением изменения величины κ в (25) в интервале $(0, \infty)$ для возможности осуществления преобразования Меллина в (24) по этому параметру. При этом, конечно, в окончательном выражении вклад от нефизической области значений λ $(-\infty, \varepsilon_0)$ будет исключен. Осуществляем преобразование Меллина функции $g(\kappa, \varepsilon)$ по аргументу κ :

$$\begin{aligned} g(\kappa, \varepsilon) &\stackrel{\text{MT}}{=} \widehat{G}(s, \varepsilon) = \int_0^{\infty} g(\kappa, \varepsilon) \kappa^{s-1} d\kappa = \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi s)} e^{-s(\varepsilon - \varepsilon_0)/T}, \quad 0 < \gamma = \text{Re } s < 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Используя это выражение, произведем преобразование Меллина в формулах (18) для N_{\pm} и получим следующие выражения для меллин-образов этих сумм:

$$N_{\pm} \stackrel{\text{MT}}{=} \widehat{N}_{\pm}(s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \sum_{n_{\perp}, n_z} (n_{\perp} + 1) \left(n_z + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} (n_{\perp} + 1) \right) e^{-s\omega_{\perp}(n_{\perp} + n_z/\eta)/T}. \quad (27)$$

Предполагая, что число квантов n_{\perp} , n_z изменяется неограниченно, что существенно не скажется в дальнейших расчетах, поскольку в суммах для N_{\pm} основной вклад дает область значений энергий вблизи энергии Ферми, проводим несложное суммирование в (27) и окончательно находим следующие выражения для $\widehat{N}_{\pm}(s)$:

$$\widehat{N}_{\pm}(s) = \frac{\pi e^{s\varepsilon_0/T}}{16 \sin(\pi s)} \cdot \frac{\text{sh}(s\omega_{\perp}(\eta \pm 1)/2\eta T)}{\text{sh}^3(s\omega_{\perp}/2T) \text{sh}^2(s\omega_{\perp}/2\eta T)}. \quad (28)$$

Переход от меллин-образов (28) непосредственно к функциям N_{\pm} осуществляется с помощью обратного преобразования Меллина по формуле

$$N_{\pm} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \widehat{N}_{\pm}(s) \kappa^{-s} ds. \quad (29)$$

Для расчета интеграла Меллина–Барнса в правой части последней формулы необходимо прямую интегрирования дополнить до контура правой или левой половиной окружности (см. рис. 2), имея в виду, что интегралы от подынтегральной функции в (29) по половинкам окружностей равны нулю. Это нетрудно проверить прямыми вычислениями. Приведя интегралы (29) к контурным интегралам, мы можем воспользоваться интегральной теоремой Коши:

$$\begin{aligned} N_{\pm} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \widehat{N}_{\pm}(s) \kappa^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_{\pm}} \widehat{N}_{\pm}(s) \kappa^{-s} ds = \\ &= \pm \sum_k \text{Res}_{s_k} [\widehat{N}_{\pm}(s) \kappa^{-s}], \end{aligned} \quad (30)$$

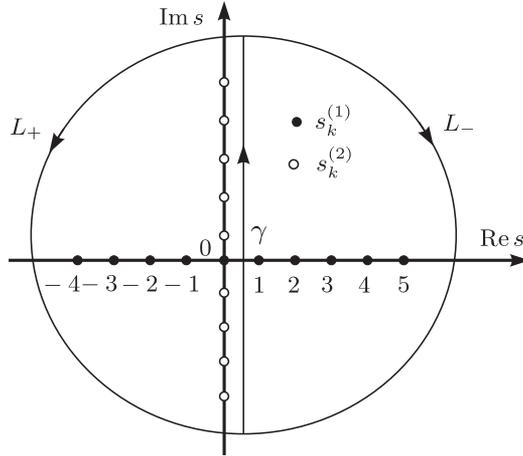


Рис. 2. Схематическое изображение положения полюсов функций (28) и контуров L_{\pm} в комплексной плоскости.

где L_+ и L_- определяют контуры с положительным и отрицательным обходом соответственно (см. рис. 2), s_k – полюсы функций $\hat{N}_{\pm}(s)\kappa^{-s}$, попавшие в соответствующие контуры. Из анализа выражений (28) для $\hat{N}_{\pm}(s)$ следует, что полюсы функций $\hat{N}_{\pm}(s)\kappa^{-s}$ можно разделить на две группы:

$$s_k^{(1)} = k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{31}$$

причем при $k \neq 0$ это простые полюсы функции $\pi / \sin(\pi s)$, а при $k = 0$ имеем полюс пятого порядка, и

$$s_k^{(2)} = \begin{cases} s'_k = \frac{T}{\omega_{\perp}} 2\pi k i & \text{– нули функции } \text{sh}^3(s\omega_{\perp}/2T), \\ s''_k = \frac{\eta T}{\omega_{\perp}} 2\pi k i & \text{– нули функции } \text{sh}^2(s\omega_{\perp}/2\eta T), \end{cases} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \tag{32}$$

Такое разделение полюсов мы произвели по следующей причине. Полюсы первой группы $s_k^{(1)}$ располагаются на действительной оси (см. рис. 2) и, как нетрудно заметить, определяют гладкую составляющую \bar{N}_{\pm} функций N_{\pm} , а следовательно, и гладкую составляющую Θ_x самого момента инерции (16). Напротив, полюсы второй группы являются чисто мнимыми и определяют осциллирующую составляющую \tilde{N}_{\pm} функций N_{\pm} , а следовательно, и осциллирующую составляющую $\tilde{\Theta}_x$ момента инерции (16). В результате имеем

$$\begin{aligned} N_{\pm} &= \bar{N}_{\pm} + \tilde{N}_{\pm}, & \bar{N}_{\pm} &= \pm \sum_k \text{Res}_{s_k^{(1)}}[\hat{N}_{\pm}(s)\kappa^{-s}], \\ \tilde{N}_{\pm} &= \pm \sum_k \text{Res}_{s_k^{(2)}}[\hat{N}_{\pm}(s)\kappa^{-s}] & \Rightarrow \Theta_x &= \bar{\Theta}_x + \tilde{\Theta}_x. \end{aligned} \tag{33}$$

Таким образом, посредством преобразования Меллина мы смогли разделить зависимость момента инерции $\Theta_x(\lambda)$ на гладкую и осциллирующую составляющие,

вклады в которые дают действительные и с отличной от нуля мнимой частью полюсы меллин-образов соответственно. Отметим, что, как уже упоминалось выше, данная процедура разделения функции на гладкую и осциллирующую составляющие не ограничивается рассмотрением только решаемой здесь задачи, но может быть применена и к другим подобным задачам, например к задаче работы [18], если возникает потребность в явных аналитических выражениях указанных вкладов.

Возвращаясь к рассматриваемой здесь задаче, отметим, что полюсы s'_k и s''_k второй группы не пересекаются и являются соответственно полюсами третьего и второго порядков в случае, если параметр деформации η принимает иррациональные значения (несоизмеримые частоты). В случае рациональных значений (соизмеримые частоты) параметра $\eta = m/n$, $m, n \in \mathbb{N}$, имеется пересечение этих полюсов: $s'_{k_1} = s''_{k_2}$ при $k_1/k_2 = m/n$. Поэтому при расчете осциллирующих составляющих необходимо разделять эти два случая. Также следует пояснить вопрос о выборе контуров в (30). Выбор левого L_+ или правого L_- контуров приведет, как мы покажем ниже, к выражениям, которые справедливы для различных областей значений λ и являются аналитическими продолжениями по отношению друг к другу. Именно здесь и происходит исключение вклада в момент инерции от нефизических значений химического потенциала λ .

4. РАСЧЕТ ГЛАДКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

Гладкая составляющая функций N_{\pm} , как было отмечено выше, определяется вычетами в полюсах, которые расположены на действительной оси. Вычислим вычеты функций $\widehat{N}_{\pm}(s)\kappa^{-s}$ в этих точках. Прежде чем производить непосредственные вычисления вычетов, примем следующие удобные в дальнейшем обозначения:

$$z = \frac{s\omega_{\perp}}{T}, \quad \phi = \frac{\lambda}{\omega_{\perp}}, \quad \tau = \frac{T}{\omega_{\perp}}, \quad (34)$$

тогда гладкие составляющие \overline{N}_{\pm} при выборе сначала контура L_+ , как это следует из (33) и рис. 2, будут вычисляться по формулам

$$\begin{aligned} \overline{N}_{\pm} &= \operatorname{Res}_{z=0}[R_{\pm}(z)] + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=-k/\tau}[R_{\pm}(z)], \\ R_{\pm}(z) &= \frac{\pi\tau e^{\phi z}}{16 \sin(\pi z\tau)} \frac{\operatorname{sh}(z(\eta \pm 1)/2\eta)}{\operatorname{sh}^3(z/2) \operatorname{sh}^2(z/2\eta)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Несложные, но достаточно громоздкие вычисления ($z = 0$ – полюс пятого порядка) приводят к следующим выражениям для вычетов, входящих в (35):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=0}[R_{\pm}(z)] &= \frac{\eta \pm 1}{5760\eta^3} \{7 \mp 28\eta + 28\eta^2 \mp 48\eta^3 + 24\eta^4 + \\ &\quad + 120\eta^2(\pm 2\eta - 1 - 2\eta^2)\phi^2 + 240\eta^4\phi^4 + \\ &\quad + 40\pi^2\eta^2(-1 \pm 2\eta - 2\eta^2 + 12\eta^2\phi^2)\tau^2 + 112\pi^4\eta^4\tau^4\}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\operatorname{Res}_{z=-k/\tau}[R_{\pm}(z)] = \frac{(-1)^k e^{-k\phi/\tau} \operatorname{sh}(k(\eta \pm 1)/2\eta\tau)}{16 \operatorname{sh}^3(k/2\tau) \operatorname{sh}^2(k/2\eta\tau)}. \quad (37)$$

Подстановка полученных выражений в (35) и последующая подстановка результата в формулу для момента инерции (16) приводят к следующему выражению для гладкой составляющей момента инерции:

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_x &= \frac{1}{\omega_{\perp}(\eta^2 - 1)} \{(\eta - 1)^3 \bar{N}_+ + (\eta + 1)^3 \bar{N}_-\} = \\ &= \frac{1}{2880\omega_{\perp}\eta^3} \{7 + 91\eta^2 + 148\eta^4 + 24\eta^6 - 40\eta^2(1 + 7\eta^2 + 2\eta^4)(3\phi^2 + \pi^2\tau^2) + \\ &\quad + 16\eta^4(1 + \eta^2)(15\phi^4 + 30\pi^2\phi^2\tau^2 + 7\pi^4\tau^4)\} + \frac{1}{16\omega_{\perp}(\eta^2 - 1)} \times \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-k\phi/\tau} \{(\eta - 1)^3 \operatorname{sh}(k(\eta + 1)/2\eta\tau) + (\eta + 1)^3 \operatorname{sh}(k(\eta - 1)/2\eta\tau)\}}{\operatorname{sh}^3(k/2\tau) \operatorname{sh}^2(k/2\eta\tau)}. \end{aligned} \quad (38)$$

При выборе правого контура L_- и полюсов, попавших в него (см. рис. 2), получим другое выражение для гладкой составляющей момента инерции:

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_x &= -\frac{1}{\omega_{\perp}(\eta^2 - 1)} \sum_{k=1}^{\infty} \{(\eta - 1)^3 \operatorname{Res}_{z=k/\tau} [R_+(z)] + (\eta + 1)^3 \operatorname{Res}_{z=k/\tau} [R_-(z)]\} = \\ &= \frac{1}{16\omega_{\perp}(\eta^2 - 1)} \times \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} e^{k\phi/\tau} \{(\eta - 1)^3 \operatorname{sh}(k(\eta + 1)/2\eta\tau) + (\eta + 1)^3 \operatorname{sh}(k(\eta - 1)/2\eta\tau)\}}{\operatorname{sh}^3(k/2\tau) \operatorname{sh}^2(k/2\eta\tau)}. \end{aligned} \quad (39)$$

Исследование на сходимость ряда в (39) показывает, что этот ряд сходится в области $-\infty < \lambda < \varepsilon_0$, которая, как упоминалось выше, является нефизической. Таким образом, выражение (39) для гладкой составляющей момента инерции не принимается в рассмотрение, а выражение (38), которое, очевидно, будет аналитическим продолжением выражения (39) для $\bar{\Theta}_x$ в область $\varepsilon_0 \leq \lambda < \infty$, выбирается в качестве окончательного выражения для искомой гладкой составляющей момента инерции.

При $\tau=0$ выражение для гладкой составляющей момента инерции принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_x(\tau)|_{\tau=0} &= \frac{1}{2880\omega_{\perp}\eta^3} \{7 + 91\eta^2 + 148\eta^4 + 24\eta^6 - \\ &\quad - 120\eta^2(1 + 7\eta^2 + 2\eta^4)\phi^2 + 240\eta^4(1 + \eta^2)\phi^4\}, \end{aligned} \quad (40)$$

который, как нетрудно заметить, отличается от выражения для твердотельного момента инерции в приближении Томаса–Ферми (20). Формула (40) приближается к выражению (20) при достаточно высоких значениях λ . При низких температурах и вблизи сферического предела ($\eta = 1$) можно записать следующую аппроксимацию выражения (38):

$$\bar{\Theta}_x \approx \frac{80(\eta^2 + 5)\lambda^4 - 120(\eta^2 + 9)\lambda^2 + 9(\eta^2 + 29)}{2880} + \frac{\pi^2}{38}(12\lambda^2 - 5)T^2. \quad (41)$$

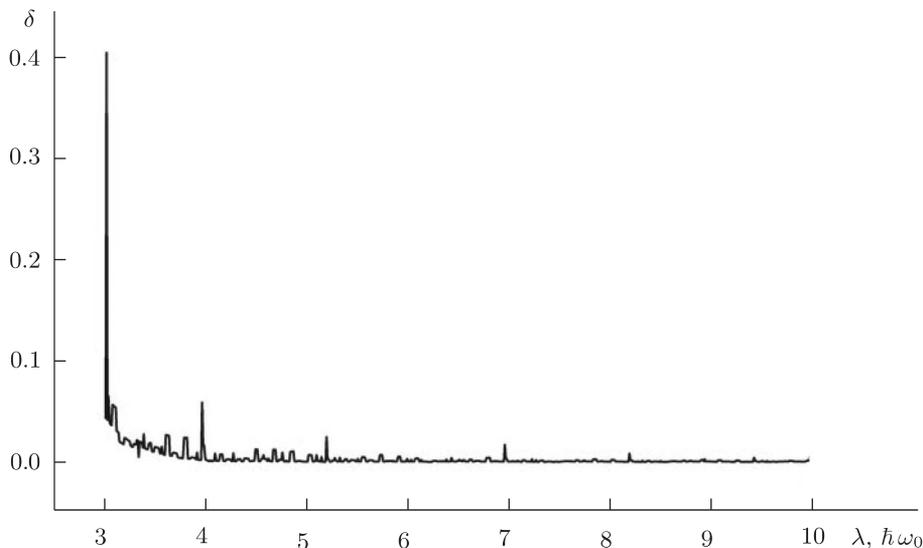


Рис. 3. Относительное отклонение $\delta = |\bar{\Theta}_x - \Theta_{x,av}| \cdot 100\% / \Theta_{x,av}$ в процентах гладкой составляющей момента инерции $\bar{\Theta}_x$ (38) от момента инерции, сглаженного по Струтинскому $\Theta_{x,av}$, как функция химического потенциала λ для параметра деформации $\eta = 6/5$ и температуры $T = 0.1\hbar\omega_0$.

Далее продемонстрируем сравнение выражения для гладкой составляющей момента инерции (38), полученное в рамках предлагаемого метода, с аналогичным выражением, которое следует из метода сглаживания Струтинского [9], [10]. Согласно процедуре, предложенной Струтинским, для получения сглаженного выражения для момента инерции в точной формуле для момента инерции (16) следует заменить функции N_{\pm} на их сглаженные аналоги $N_{av\pm}$, которые определяются по формулам

$$N_{av\pm} = \sum_{n_{\perp}, n_z} \tilde{f}(\varepsilon_{n_{\perp}n_z} - \lambda)(n_{\perp} + 1) \left(n_z + \frac{1}{2} \pm \frac{n_{\perp} + 1}{2} \right),$$

где

$$\tilde{f}(\varepsilon - \lambda) = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' f(\varepsilon - \lambda') \xi_M \left(\frac{\lambda' - \lambda}{\gamma} \right), \quad \xi_M(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} P_{2M}(x).$$

Здесь $P_{2M}(x) = \sum_{k=0,2,\dots}^{2M} \alpha_k H_k(x)$, где $H_k(x)$ – полиномы Эрмита, $\alpha_k = -\alpha_{k-2}/2k$ ($\alpha_0 = 1$), определяет корректирующий полином порядка $2M$ (обычно $M = 4-10$). Ширина кривой Гаусса γ и порядок полинома M выбираются на плато зависимости оболочечной поправки момента инерции $\delta\Theta_x(\varepsilon) = \Theta_x(\varepsilon) - \Theta_{x,av}(\varepsilon)$ от γ для нескольких значений M при фиксированном ε . Вычисления показывают, что $\gamma = 1.5-2.5\omega_0$ при $M = 4-8$. Отметим, что процедура выделения гладкой составляющей по Струтинскому является численной процедурой, поэтому развиваемый в работе метод выделения гладкой составляющей обладает некоторым преимуществом, поскольку позволяет получить аналитические выражения.

Сравнение значений гладкой составляющей момента инерции, полученных по формуле (38), с соответствующими значениями, вычисленными по процедуре сглаживания Струтинского, показывает хорошее согласие. Для наглядной демонстрации этого вывода на рис. 3 изображена зависимость от λ относительного отклонения $\delta = |\bar{\Theta}_x - \Theta_{x,av}| \cdot 100\% / \Theta_{x,av}$ в процентах момента инерции $\bar{\Theta}_x$ (38) от сглаженного по Струтинскому момента инерции $\Theta_{x,av}$ для параметра деформации $\eta = 6/5$ и температуры $T = 0.1\hbar\omega_0$. Из рисунка видно, что совпадение гладких составляющих обоих методов прекрасное, а отклонения заметны лишь при малых значениях λ . Таким образом, на основании численных расчетов можно сделать вывод об эквивалентности предлагаемого метода выделения гладкой составляющей момента инерции методу сглаживания Струтинского.

5. РАСЧЕТ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

В данном разделе мы проведем расчет осциллирующей составляющей момента инерции, следуя общей методике, изложенной в разделе 3. Как уже упоминалось в разделе 3, при расчете рассмотрим два случая: иррациональных и рациональных значений параметра деформации η .

5.1. Случай иррациональных значений η . В случае иррациональных значений параметра η полюсы второй группы s'_k и s''_k , которые находятся внутри контура L_+ (см. рис. 2), не пересекаются, поэтому согласно (33) для осциллирующих составляющих функций \tilde{N}_\pm при выборе контура L_+ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{N}_\pm = & \sum_k \operatorname{Res}_{z'_k} [R_\pm(z)] + \sum_k \operatorname{Res}_{z''_k} [R_\pm(z)] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{Res}_{z=2\pi ik} [R_\pm(z)] + \operatorname{Res}_{z=-2\pi ik} [R_\pm(z)] \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{Res}_{z=2\pi ik\eta} [R_\pm(z)] + \operatorname{Res}_{z=-2\pi ik\eta} [R_\pm(z)] \right), \end{aligned} \quad (42)$$

где $z'_k = s'_k/\tau$, $z''_k = s''_k/\tau$, а $R_\pm(z)$ определяются в (35). Снова, не приводя деталей расчета, которые являются элементарными, но громоздкими, запишем сразу результаты вычислений вычетов, входящих в (42):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=2\pi ik} [R_\pm(z)] + \operatorname{Res}_{z=-2\pi ik} [R_\pm(z)] &= A_k^\pm \cos(2\pi k\phi) + B_k^\pm \sin(2\pi k\phi), \\ A_k^\pm &= \pm \frac{\pi\tau}{8\eta^2 \sin(\pi k/\eta) \operatorname{sh}(2\pi^2 k\tau)} \left\{ (1 \mp 2\eta) \left(1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi k}{\eta} \right) \right) - 4\eta^2 (\phi^2 + \pi^2 \tau^2) + \right. \\ & \quad \left. + 4\pi\eta\tau \operatorname{cth}(2\pi^2 k\tau) \left[(1 \mp \eta) \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{\eta} + 2\pi\eta\tau \operatorname{cth}(2\pi^2 k\tau) \right] \right\}, \\ B_k^\pm &= \pm \frac{\pi\tau\phi}{2\eta \sin(\pi k/\eta) \operatorname{sh}(2\pi^2 k\tau)} \left\{ (1 \mp \eta) \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{\eta} + 2\pi\eta\tau \operatorname{cth}(2\pi^2 k\tau) \right\}, \quad (43) \\ \operatorname{Res}_{z=2\pi ik\eta} [R_\pm(z)] + \operatorname{Res}_{z=-2\pi ik\eta} [R_\pm(z)] &= C_k^\pm \cos(2\pi k\eta\phi) + D_k^\pm \sin(2\pi k\eta\phi), \\ C_k^\pm &= \frac{\pi\tau\eta(-1)^{k+1}}{4 \sin^2(\pi k\eta) \operatorname{sh}(2\pi^2 k\eta\tau)} \{ (2\eta \mp 1) \operatorname{ctg}(\pi k\eta) + 2\pi\eta\tau \operatorname{cth}(2\pi^2 k\eta\tau) \}, \\ D_k^\pm &= \frac{(-1)^{k+1} \pi\tau\eta^2 \phi}{2 \sin^2(\pi k\eta) \operatorname{sh}(2\pi^2 k\eta\tau)}. \end{aligned}$$

Подстановка полученных выражений в (42) приводит к следующему результату для \tilde{N}_{\pm} :

$$\tilde{N}_{\pm} = \sum_{k=1}^{\infty} \{A_k^{\pm} \cos(2\pi k\phi) + B_k^{\pm} \sin(2\pi k\phi) + C_k^{\pm} \cos(2\pi k\eta\phi) + D_k^{\pm} \sin(2\pi k\eta\phi)\}. \quad (44)$$

Зная осциллирующие составляющие функций N_{\pm} , по формуле (16) восстанавливаем осциллирующую составляющую момента инерции:

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_x &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(2\pi k\phi) + B_k \sin(2\pi k\phi) + C_k \cos(2\pi k\eta\phi) + D_k \sin(2\pi k\eta\phi)), \\ A_k &= \frac{(\eta-1)^3 A_k^+ + (\eta+1)^3 A_k^-}{\omega_{\perp}(\eta^2-1)} = \\ &= -\frac{\pi\tau}{4\omega_{\perp}\eta^2(\eta^2-1)\sin(\pi k/\eta)\operatorname{sh}(2\pi^2 k\tau)} \times \\ &\times \left\{ 1 - \eta^2(-9 + 4\pi^2\tau^2(3\eta^2+1) + 4\phi^2 + 2\eta^2(6\phi^2-1)) + \right. \\ &+ 2(1 + 9\eta^2 + 2\eta^4) \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi k}{\eta} + 4\pi\tau \operatorname{cth}(2\pi^2 k\tau) \times \\ &\left. \times \left[\eta(1 + 6\eta^2 + \eta^4) \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{\eta} + 2\pi\eta^2\tau(3\eta^2+1) \operatorname{cth}(2\pi^2 k\tau) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{(\eta-1)^3 B_k^+ + (\eta+1)^3 B_k^-}{\omega_{\perp}(\eta^2-1)} = \\ &= -\frac{\pi\tau\phi[(1 + 6\eta^2 + \eta^4) \operatorname{ctg}(\pi k/\eta) + 2\pi\eta\tau(3\eta^2+1) \operatorname{cth}(2\pi^2 k\tau)]}{\omega_{\perp}\eta(\eta^2-1)\sin(\pi k/\eta)\operatorname{sh}(2\pi^2 k\tau)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{(\eta-1)^3 C_k^+ + (\eta+1)^3 C_k^-}{\omega_{\perp}(\eta^2-1)} = \\ &= \frac{\pi\tau\eta(-1)^{k+1}[(2\eta^4 + 9\eta^2 + 1) \operatorname{ctg}(\pi k\eta) + 2\pi\eta^2\tau(3 + \eta^2) \operatorname{cth}(2\pi^2 k\eta\tau)]}{2\omega_{\perp}(\eta^2-1)\sin^2(\pi k\eta)\operatorname{sh}(2\pi^2 k\eta\tau)}, \end{aligned}$$

$$D_k = \frac{(\eta-1)^3 D_k^+ + (\eta+1)^3 D_k^-}{\omega_{\perp}(\eta^2-1)} = \frac{(-1)^{k+1}\pi\tau\eta^3(\eta^2+3)\phi}{\omega_{\perp}(\eta^2-1)\sin^2(\pi k\eta)\operatorname{sh}(2\pi^2 k\eta\tau)}.$$

Из анализа полученного выражения можно сделать следующие важные выводы. В осциллирующую составляющую $\tilde{\Theta}_x(\lambda)$ момента инерции дают вклад два “периодических” процесса: процесс с “периодом”, равным $\omega_{\perp} = \eta^{1/3}$, и процесс с “периодом”, равным $\omega_{\perp}/\eta \equiv \omega_z = \eta^{-2/3}$. Анализ выражений для коэффициентов A_k , B_k , C_k , D_k (45) показывает, что осцилляции момента инерции затухают с ростом температуры по экспоненциальному закону, $\{A_k, B_k\} \sim e^{-2\pi^2 k\tau}$, $\{C_k, D_k\} \sim e^{-2\pi^2 k\eta\tau}$, и усиливаются при приближении к сферическому пределу ($\eta \rightarrow 1$).

Вблизи сферического предела коэффициенты A_k , B_k , C_k , D_k можно аппроксимировать выражениями

$$\begin{aligned} A_k &\approx -\frac{6\pi T}{(\eta^2 - 1) \sin^3(\pi k/\eta) \operatorname{sh}(2\pi^2 kT)}, & B_k &\approx \frac{8(-1)^{k+1} \pi T \lambda}{(\eta^2 - 1) \sin^2(\pi k/\eta) \operatorname{sh}(2\pi^2 kT)}, \\ C_k &\approx -\frac{6\pi T}{(\eta^2 - 1) \sin^3(\pi k\eta) \operatorname{sh}(2\pi^2 kT)}, & D_k &\approx \frac{4(-1)^{k+1} \pi T \lambda}{(\eta^2 - 1) \sin^2(\pi k\eta) \operatorname{sh}(2\pi^2 kT)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Из полученных формул видно, что коэффициенты A_k , B_k , C_k , D_k при приближении к сферическому пределу растут. Однако неограниченного увеличения вклада осциллирующей составляющей момента инерции не происходит и в сферическом пределе она принимает следующее предельное выражение для высоких значений λ :

$$\tilde{\Theta}_x|_{\eta=1} \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2\pi^2 k T \lambda^4}{3 \operatorname{sh}(2\pi^2 kT)} \left[\cos(2\pi k\lambda) - \frac{8\pi^3 k T^2}{3\lambda} \sin(2\pi k\lambda) \right]. \quad (47)$$

В пределе $\tau = 0$ осцилляции исчезают, и осциллирующая составляющая становится равной $\tilde{\Theta}_x|_{\tau=0, \eta=1} = -\bar{\Theta}_x|_{\tau=0, \eta=1}$. В результате при $\tau = 0$ в сферическом пределе момент инерции $\Theta_x|_{\tau=0, \eta=1} = \bar{\Theta}_x|_{\tau=0, \eta=1} + \tilde{\Theta}_x|_{\tau=0, \eta=1} = 0$. Таким образом, сферически-симметричные ядра при нулевой температуре в рамках рассматриваемой модели не обладают моментом инерции. Отметим, что этот же результат предсказывает гидродинамическая модель, когда вращение ядра представляется как потенциальное движение жидкости во вращающейся оболочке.

5.2. Случай рациональных значений η . Как уже упоминалось в разделе 3, в случае рациональных значений параметра деформации $\eta = m/n$, $m, n \in \mathbb{N}$, имеется пересечение полюсов второй группы: $s'_{k_1} = s''_{k_2}$ при $k_1/k_2 = m/n$. Поэтому необходимо пересчитать значения вычетов функций $R_{\pm}(z)$ (35) в точках совпадения полюсов, поскольку теперь они становятся полюсами четвертого порядка. Для вычисления вычетов в полюсах $s'_{k_1} = s''_{k_2}$ выбираем $k_1 = mk$, $k_2 = nk$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, и после несложных вычислений находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=2\pi imk} [R_{\pm}(z)] + \operatorname{Res}_{z=-2\pi imk} [R_{\pm}(z)] &= P_k^{\pm} \cos(2\pi mk\phi) + Q_k^{\pm} \sin(2\pi mk\phi), \\ P_k^{\pm} &= \frac{(-1)^{nk+1} \pi^2 \tau^2 (\eta \pm 1) \operatorname{cth}(2\pi^2 mk\tau)}{12\eta \operatorname{sh}(2\pi^2 mk\tau)} \times \\ &\quad \times [1 + 2\eta(\mp 1 - \eta(6\phi^2 + 10\pi^2 \tau^2 - 1)) + 24\pi^2 \tau^2 \eta^2 \operatorname{cth}^2(2\pi^2 mk\tau)], \\ Q_k^{\pm} &= \frac{(-1)^{nk+1} \pi \tau (\eta \pm 1) \phi}{12\eta \operatorname{sh}(2\pi^2 mk\tau)} \times \\ &\quad \times [1 + 2\eta(\mp 1 - \eta(2\phi^2 + 6\pi^2 \tau^2 - 1)) + 24\pi^2 \tau^2 \eta^2 \operatorname{cth}^2(2\pi^2 mk\tau)]. \end{aligned} \quad (48)$$

Подстановка полученных выражений в формулы для \tilde{N}_\pm и последующая подстановка результата в выражение для $\tilde{\Theta}_x$ приводят к следующему выражению для осциллирующей составляющей момента инерции в случае рациональных значений η :

$$\tilde{\Theta}_x = \sum_{k=1}^{\infty} (A'_k \cos(2\pi k\phi) + B'_k \sin(2\pi k\phi) + C'_k \cos(2\pi k\eta\phi) + D'_k \sin(2\pi k\eta\phi)),$$

$$A'_k = \begin{cases} A_k, & k/m \notin \mathbb{N}, \\ P_k, & k/m \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad B'_k = \begin{cases} B_k, & k/m \notin \mathbb{N}, \\ Q_k, & k/m \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$C'_k = \begin{cases} C_k, & k/n \notin \mathbb{N}, \\ 0, & k/n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad D'_k = \begin{cases} D_k, & k/n \notin \mathbb{N}, \\ 0, & k/n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (49)$$

$$P_k = \frac{(-1)^{k+1} \pi^2 \tau^2 \operatorname{cth}(2\pi^2 k\tau)}{6\eta\omega_\perp \operatorname{sh}(2\pi^2 k\tau)} [1 + \eta^2(7 + 2\eta^2 - 4(\eta^2 + 1)(3\phi^2 + 5\pi^2 \tau^2)) + 24\pi^2 \tau^2 \eta^2 (\eta^2 + 1) \operatorname{cth}^2(2\pi^2 k\tau)],$$

$$Q_k = \frac{(-1)^{k+1} \pi \tau \phi}{6\eta\omega_\perp \operatorname{sh}(2\pi^2 k\tau)} [1 + \eta^2(7 + 2\eta^2 - 4(\eta^2 + 1)(\phi^2 + 3\pi^2 \tau^2)) + 24\pi^2 \tau^2 \eta^2 (\eta^2 + 1) \operatorname{cth}^2(2\pi^2 k\tau)].$$

В пределе $\tau \rightarrow 0$ коэффициенты P_k , Q_k стремятся к предельным значениям

$$P_k^0 = (-1)^{k+1} \frac{6\eta^2(1 + \eta^2) + \pi^2 k^2(1 + 7\eta^2 + 2\eta^4 - 12\eta^2(1 + \eta^2)\phi^2)}{24\pi^4 k^4 \eta \omega_\perp},$$

$$Q_k^0 = (-1)^{k+1} \phi \frac{6\eta^2(1 + \eta^2) + \pi^2 k^2(1 + 7\eta^2 + 2\eta^4 - 4\eta^2(1 + \eta^2)\phi^2)}{12\pi^3 k^3 \eta \omega_\perp}. \quad (50)$$

Как нетрудно заметить из (49) и (50), гармоники, соответствующие совпадающим частотам, вследствие рациональности η не усиливаются при приближении к сферическому пределу.

6. ТВЕРДОТЕЛЬНЫЙ МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

Обсудим поведение момента инерции с изменением химического потенциала при выполнении условия статистически равновесного вращения (23), когда его выражение (16) переходит в твердотельное выражение (19). Чтобы воспользоваться результатами предыдущих разделов, представим выражение для твердотельного момента инерции (19) в виде

$$\Theta_x^{\text{rig}} = \frac{1}{\omega_\perp} ((\eta + 1)N_+ + (\eta - 1)N_-), \quad (51)$$

где N_\pm определяются в (33). Поскольку, как было показано в разделе 5, функции N_\pm состоят из гладкой и осциллирующей составляющих, то очевидно, что

твердотельный момент инерции также будет содержать осциллирующую составляющую. Интересно оценить масштаб этих осцилляций и сравнить степень их проявления с осцилляциями момента инерции, когда статистически равновесное вращение нарушается.

Используя результаты раздела 5 для \bar{N}_\pm , \tilde{N}_\pm и проводя аналогичные вычисления, для Θ_x^{rig} получим

$$\Theta_x^{\text{rig}} = \bar{\Theta}_x^{\text{rig}} + \tilde{\Theta}_x^{\text{rig}},$$

где гладкая составляющая $\bar{\Theta}_x^{\text{rig}}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_x^{\text{rig}} = & \frac{1}{2880\omega_\perp\eta^3} \{7 - 65\eta^2 + 24\eta^4 - 40\eta^2(2\eta^4 + 1 - \eta^2)(3\phi^2 + \pi^2\tau^2) + \\ & + 16\eta^4(1 + \eta^2)(15\phi^4 + 30\pi^2\tau^2\phi^2 + 7\pi^4\tau^4)\} + \frac{1}{16\omega_\perp} \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-k\phi/\tau} \{(\eta + 1) \text{sh}(k(\eta + 1)/2\eta\tau) + (\eta - 1) \text{sh}(k(\eta - 1)/2\eta\tau)\}}{\text{sh}^3(k/2\tau) \text{sh}^2(k/2\eta\tau)}, \end{aligned} \quad (52)$$

осциллирующая составляющая $\tilde{\Theta}_x^{\text{rig}}$ для иррациональных значений параметра η определяется выражением

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_x^{\text{rig}} = & \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{\text{rig}} \cos(2\pi k\phi) + B_k^{\text{rig}} \sin(2\pi k\phi) + C_k^{\text{rig}} \cos(2\pi k\eta\phi) + D_k^{\text{rig}} \sin(2\pi k\eta\phi)), \\ A_k^{\text{rig}} = & \frac{(\eta + 1)A_k^+ + (\eta - 1)A_k^-}{\omega_\perp} = \\ = & \frac{\pi\tau}{4\eta^2\omega_\perp \sin(\pi k/\eta) \text{sh}(2\pi^2 k\tau)} \left\{ 1 - 2\eta^2(1 + 2\pi^2\tau^2 + 2\phi^2) + 2(1 - 2\eta^2) \text{ctg}^2 \frac{\pi k}{\eta} + \right. \\ & \left. + 4\pi\eta\tau \text{cth}(2\pi^2 k\tau) \left[(1 - \eta^2) \text{ctg} \frac{\pi k}{\eta} + 2\pi\eta\tau \text{cth}(2\pi^2 k\tau) \right] \right\}, \\ B_k^{\text{rig}} = & \frac{(\eta + 1)B_k^+ + (\eta - 1)B_k^-}{\omega_\perp} = \frac{\pi\tau\phi[(1 - \eta^2) \text{ctg}(\pi k/\eta) + 2\pi\eta\tau \text{cth}(2\pi^2 k\tau)]}{\omega_\perp\eta \sin(\pi k/\eta) \text{sh}(2\pi^2 k\tau)}, \\ C_k^{\text{rig}} = & \frac{(\eta + 1)C_k^+ + (\eta - 1)C_k^-}{\omega_\perp} = \\ = & \frac{\pi\tau\eta(-1)^{k+1}[(2\eta^2 - 1) \text{ctg}(\pi k\eta) + 2\pi\eta^2\tau \text{cth}(2\pi^2 k\eta\tau)]}{2\omega_\perp \sin^2(\pi k\eta) \text{sh}(2\pi^2 k\eta\tau)}, \\ D_k^{\text{rig}} = & \frac{(\eta + 1)D_k^+ + (\eta - 1)D_k^-}{\omega_\perp} = \frac{(-1)^{k+1}\pi\tau\eta^3\phi}{\omega_\perp \sin^2(\pi k\eta) \text{sh}(2\pi^2 k\eta\tau)}, \end{aligned} \quad (53)$$

а для случая рациональных значений параметра $\eta = m/n$

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_x^{\text{rig}} &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{\text{rig}} \cos(2\pi k\phi) + B_k^{\text{rig}} \sin(2\pi k\phi) + C_k^{\text{rig}} \cos(2\pi k\eta\phi) + D_k^{\text{rig}} \sin(2\pi k\eta\phi)), \\ A_k^{\text{rig}} &= \begin{cases} A_k^{\text{rig}}, & k/m \notin \mathbb{N}, \\ P_k^{\text{rig}}, & k/m \in \mathbb{N}, \end{cases} & B_k^{\text{rig}} &= \begin{cases} B_k^{\text{rig}}, & k/m \notin \mathbb{N}, \\ Q_k^{\text{rig}}, & k/m \in \mathbb{N}, \end{cases} \\ C_k^{\text{rig}} &= \begin{cases} C_k^{\text{rig}}, & k/n \notin \mathbb{N}, \\ 0, & k/n \in \mathbb{N}, \end{cases} & D_k^{\text{rig}} &= \begin{cases} D_k^{\text{rig}}, & k/n \notin \mathbb{N}, \\ 0, & k/n \in \mathbb{N}, \end{cases} \\ P_k^{\text{rig}} &= \frac{(-1)^{nk+1} \pi^2 \tau^2 \text{cth}(2\pi^2 k\tau)}{6\eta\omega_{\perp} \text{sh}(2\pi^2 k\tau)} [1 + \eta^2(2\eta^2 - 1) - 4\eta^2(\eta^2 + 1)(3\phi^2 + 5\pi^2 \tau^2) + \\ &\quad + 24\pi^2 \tau^2 \eta^2 (\eta^2 + 1) \text{cth}^2(2\pi^2 k\tau)], \\ Q_k^{\text{rig}} &= \frac{(-1)^{nk+1} \pi \tau \phi}{6\eta\omega_{\perp} \text{sh}(2\pi^2 k\tau)} [1 + \eta^2(2\eta^2 - 1) - 4(\eta^2 + 1)(\phi^2 + 3\pi^2 \tau^2) + \\ &\quad + 24\pi^2 \tau^2 \eta^2 (\eta^2 + 1) \text{cth}^2(2\pi^2 k\tau)]. \end{aligned} \tag{54}$$

Снова приведем выражение для гладкой составляющей в пределе $\tau \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_x^{\text{rig}}(\tau)|_{\tau=0} &= \\ &= \frac{7 - 21\eta^2 - 44\eta^4 + 24\eta^6 + 120\eta^2(-1 + \eta^2 - 2\eta^4)\phi^2 + 240\eta^4(1 + \eta^2)\phi^4}{2880\omega_{\perp}\eta^3} \eta^{-1} \approx \\ &\approx \frac{240\lambda^4 - 120\lambda^2 - 17}{1440} + \frac{240\lambda^4 - 360\lambda^2 + 59}{8640}(\eta^2 - 1), \end{aligned} \tag{55}$$

а также приближенные выражения для коэффициентов A_k^{rig} , B_k^{rig} , C_k^{rig} , D_k^{rig} вблизи сферического предела:

$$\begin{aligned} A_k^{\text{rig}} &\approx -\frac{\pi T}{\sin^3(\pi k/\eta) \text{sh}(2\pi^2 kT)}, & B_k^{\text{rig}} &\approx \frac{(-1)^k \pi T \lambda (1 - \eta^2)}{\sin^2(\pi k/\eta) \text{sh}(2\pi^2 kT)}, \\ C_k^{\text{rig}} &\approx -\frac{\pi T}{\sin^3(\pi k\eta) \text{sh}(2\pi^2 kT)}, & D_k^{\text{rig}} &\approx \frac{(-1)^{k+1} \pi T \lambda}{\sin^2(\pi k\eta) \text{sh}(2\pi^2 kT)}. \end{aligned} \tag{56}$$

Из полученных формул мы снова замечаем, что коэффициенты A_k^{rig} , B_k^{rig} , C_k^{rig} , D_k^{rig} при приближении к сферическому пределу растут. Однако неограниченного увеличения вклада осциллирующей составляющей твердотельного момента инерции не происходит, и в сферическом пределе она принимает следующее предельное выражение для высоких значений λ :

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_x^{\text{rig}}(\eta)|_{\eta=1} &\approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 4\pi^2 T^2 \lambda^2}{\text{sh}^2(2\pi^2 kT)} \left[\text{ch}(2\pi^2 kT) \cos(2\pi k\lambda) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{3\pi T} \text{sh}(2\pi^2 kT) \sin(2\pi k\lambda) \right]. \end{aligned} \tag{57}$$

Сравнивая выражения (57) и (47), заключаем, что амплитуды гармоник осциллирующей составляющей твердотельного момента инерции с ростом k убывают быстрее, чем амплитуды гармоник в выражении (47), поэтому осцилляции твердотельного выражения для момента инерции выражены значительно слабее при приближении к сферическому пределу, чем осцилляции выражения (16) для момента инерции.

В пределе $T = 0$ формула (57) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_x^{\text{rig}}|_{\eta=1, T=0} &\approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^2}{\pi^2 k^2} \left[\cos(2\pi k \lambda) + \frac{2\pi k \lambda}{3} \sin(2\pi k \lambda) \right] = \\ &= \lambda^2 \left[(\lambda - m) \left(\frac{\lambda}{3} - m \right) - \frac{1}{12} \right], \\ m - \frac{1}{2} &< \lambda < m + \frac{1}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (58)$$

который не вырождается в гладкую форму, как в случае с выражением (16) для момента инерции. Поэтому твердотельный момент инерции в сферическом пределе при $T = 0$ не исчезает, а осцилляции сохраняются. Для высоких значений λ зависимость момента инерции $\Theta_x^{\text{rig}}|_{\eta=1, T=0}$ приобретает вид “ступенчатой” функции

$$\Theta_x^{\text{rig}}|_{\eta=1, T=0} \simeq \Theta_{x, \text{TF}}^{\text{rig}}|_{\eta=1, \lambda=m} = \frac{m^2}{6}, \quad m - \frac{1}{2} < \lambda < m + \frac{1}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (59)$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведен строгий аналитический расчет зависимости момента инерции нагретой конечной системы нуклонов от химического потенциала в рамках модели принудительного вращения с потенциалом анизотропного гармонического осциллятора. Для расчета была использована стандартная методика преобразования Меллина, которая позволила разделить момент инерции на две составляющие: гладкую и осциллирующую. Полученные явные аналитические выражения для указанных составляющих, которые справедливы во всем интервале температур и параметров деформации ядра, позволяют непосредственно (без обращения к численным расчетам) выделить важные характерные особенности зависимостей момента инерции конечной ферми-системы от числа частиц, температуры и деформации системы. В частности, показано, что осцилляции момента инерции в зависимости от химического потенциала усиливаются при приближении к сферическому пределу, когда $\omega_{x,y} \rightarrow \omega_z$, а с увеличением температуры быстро спадают. При нулевой температуре в сферическом пределе, так же как и в гидродинамической модели вращения ядра, момент инерции обращается в нуль. Проведен расчет твердотельного момента инерции, который реализуется при выполнении условия статистически равновесного вращения, и показано, что осцилляции в зависимости от химического потенциала присутствуют и здесь. Однако осцилляции для твердотельного момента инерции проявляются слабее и не исчезают при нулевой температуре в сферическом пределе.

Развитая в работе методика разделения физических величин на гладкую и осциллирующую составляющие и их аналитического расчета может быть успешно применена и к другим системам, где проявляется сложное немонотонное поведение физических характеристик, обусловленное ограниченностью геометрии системы или движения частиц.

Список литературы

- [1] D. R. Inglis, *Phys. Rev.*, **96**:4 (1954), 1059–1065; **97**:3 (1955), 701–706; **103**:6 (1956), 1786–1795.
- [2] A. Bohr, B. R. Mottelson, *Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **30**:1 (1955).
- [3] A. Bohr, B. Mottelson, *Nuclear Structure*, v. 2, Benjamin, New York, 1975.
- [4] В. В. Пашкевич, С. Фраундорф, *ЯФ*, **20** (1974), 1122–.
- [5] И. Н. Михайлов, К. Неергор, В. В. Пашкевич, С. Фраундорф, *ЭЧАЯ*, **8**:6 (1977), 1338–1411.
- [6] M. Brack, R. K. Bhaduri, *Semiclassical Physics*, *Frontiers in Physics*, **96**, Westview Press, Boulder, CO, 2003.
- [7] K. Bencheikh, P. Quentin, J. Bartel, *Nucl. Phys. A*, **571**:3 (1994), 518–540.
- [8] E. Chabanat, J. Meyer, K. Bencheikh, P. Quentin, J. Bartel, *Phys. Lett. B*, **325**:1–2 (1994), 13–19.
- [9] V. M. Strutinsky, *Nucl. Phys. A*, **95**:2 (1967), 420–442; **122**:1 (1968), 1–33.
- [10] M. Brack, L. Damgaard, A. S. Jensen, H. C. Pauli, V. M. Strutinsky, C. Y. Wong, *Rev. Modern Phys.*, **44**:2 (1972), 320–406.
- [11] В. Г. Зелевинский, *ЯФ*, **22**:6 (1975), 1085–1095.
- [12] L. Jacak, W. Nawrocka, R. G. Nazmitdinov, A. Wojs, *J. Phys. G*, **21**:9 (1995), 1205–1216.
- [13] A. G. Magner, A. S. Sitdikov, A. A. Khamzin, J. Bartel, *Phys. Rev. C*, **81**:6 (2010), 064302, 20 pp.
- [14] M. J. Gutzwiller, *J. Math. Phys.*, **12**:3 (1967), 343–358.
- [15] В. М. Струтинский, А. Г. Магнер, *ЭЧАЯ*, **7**:2 (1976), 356–418.
- [16] A. G. Magner, A. S. Sitdikov, A. A. Khamzin, J. Bartel, A. M. Gzhebinsky, *Phys. Atom. Nucl.*, **73**:8 (2010), 1398–1404.
- [17] A. G. Magner, A. M. Gzhebinsky, A. S. Sitdikov, A. A. Khamzin, J. Bartel, *Internat. J. Modern Phys. E*, **19**:4 (2010), 735–746.
- [18] А. Р. Миннуллин, Д. А. Таюрский, *Письма в ЖЭТФ*, **72**:12 (2000), 891–897.

Поступила в редакцию 21.11.2012,
после доработки 11.02.2013